KANONISCHE MODELLE FÜR SCHNITTFREIE KALKÜLE MIT BESONDERER ANWENDUNG AUF DIE TYPENLOGIK

Dissertation
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften
dem Fachbereich Mathematik
der Eberhard-Karls-Universität
zu Tübingen

vorgelegt von
Siegfried Pfitzenmaier
aus Leonberg

1977

KANONISCHE MODELLE FÜR SCHNITTFREIE KALKÜLE MIT BESONDERER ANWENDUNG AUF DIE TYPENLOGIK

Dissertation
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften
dem Fachbereich Mathematik
der Eberhard-Karls-Universität
zu Tübingen

vorgelegt von
Siegfried Pfitzenmaier
aus Leonberg

1977

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Tag der mündlichen Prüfung: 7. März 1977

Dekan: Prof.Dr.H.H.Schaefer

1.Berichterstatter: Prof.Dr.W.Felscher

2.Berichterstatter: Prof.Dr.U.Felgner

INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
Einleitung	1
Kapitel I. Die Kalküle ITE und KTE	5
§1. Formale Sprache und Regeln. Das Substitutivitätsprinzip.	5
§2. Strukturbegriff. Die Lindenbaumalgebra; Vollständigkeit von ITE und KTE.	10
Kapitel II. Konstruktion algebraischer Modelle aus Kalkülen ohne Schnitt	18
A. Intuitionistische Logik	
§1. Intuitionistische Aussagenlogik.	18
§2. Intuitionistische Prädikatenlogik.	25
§3. ITE.	26
B. Klassische Logik	
§1. Klassische Aussagenlogik.	31
§2. Klassische Prädikatenlogik.	35
§3. KTE.	36
Kapitel III. "Model-Existence-Theorem" und "Generic-Model-Theorem"	37
§1. "Model-Existence-Theorem".	37
§2. "Generic-Model-Theorem".	40
§3. Das "Model-Existence-Theorem" als Folgerung aus dem "Generic-Model-Theorem".	44
Kapitel IV. Ein Vollständigkeitsbeweis für KTE ohne Schnitt mit Hilfe der Tableaumethode	50
§1. Motivation.	50
§2. Der Beweis.	52
Literaturverzeichnis	63

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41523707_0074

EINLEITUNG

Für einige Systeme der einfachen Typenlogik wurden semantische Beweise für die Zulässigkeit der Schnittregel geführt; sie haben die Form von Vollständigkeitsbeweisen für die Systeme ohne Schnitt in bezug auf geeignete Klassen von Strukturen (vergleiche [6], p.452). Die beiden ersten Beweise dieser Art (in [6] und [11]) betrafen das System KT der klassischen einfachen Typentheorie mit λ-Konversionsregeln und ohne Extensionalitätsprinzip. Die für KT geeigneten Strukturen bestehen aus Paaren $\langle t,a\rangle$ von Termen der Sprache und Mengen für diese Terme, so daß formal verschiedene Terme t_1 und t_2, welche extensional gleiche Mengen $a_1 = a_2$ bestimmen, durch verschiedene Objekte $\langle t_1, a_1\rangle$ und $\langle t_2, a_2\rangle$ interpretiert werden können. Es stellte sich mir die Frage, ob die Nicht-Extensionalität auch durch einen Strukturbegriff erfaßt werden könnte, der ohne die Aufnahme formaler Ausdrücke der Sprache in die Definition der Struktur auskommt. Wenn man bedenkt, daß man Mengen auch durch deren charakteristische Funktionen ersetzen kann, liegt der Versuch nahe, statt nur 2-wertiger allgemeiner Boolesch-wertige Funktionen zu betrachten, - ähnlich, wie es in den Boolesch-wertigen Modellen der Mengenlehre gemacht worden ist. Tatsächlich ergibt sich der Begriff einer aus solchen Funktionen aufgebauten Boolesch-wertigen Struktur für die Typenlogik als eine natürliche Verallgemeinerung von 2-wertigen Strukturen; dabei zeigt sich jedoch, daß eine eingeschränkte Form der Extensionalitätsregel weiterhin gilt (denn Funktionen mit gleichem Wertverlauf sind gleich).

Das System KTE der um diese spezielle Extensionalitätsregel (E) erweiterten Typenlogik bildet - zusammen mit seiner intuitionistischen Variante ITE - den Gegenstand des ersten Kapitels. Die Regel (E) hat eigentlich eher den Charakter einer Kongruenzregel (nämlich in bezug auf logische Äquivalenz) als den einer Extensionalitätsregel; das kommt in dem in Kapitel I. formulierten "Substitutivitätsprinzip" und dem daraus entwickelten Beweis des Vollständigkeitssatzes mittels der Lindenbaumalgebra zum Ausdruck. Dabei wird von der Schnittregel ausführlicher Gebrauch gemacht.

Zur Klärung der Frage, ob auch ITE und KTE ohne Schnitt vollständig sind, habe ich zunächst im einfachen Fall der intuitionistischen Aussagenlogik untersucht, wieweit die Schnittregel für die Konstruktion der Lindenbaumalgebra wesentlich ist, beziehungsweise, ob der Versuch der Elimination der Schnittregel aus dieser Konstruktion Anlaß gibt zur Definition einer anderen, geeigneten Testalgebra. Dies wird zu Anfang des zweiten Kapitels ausgeführt. Man kommt mit einiger Notwendigkeit auf die Definition einer Heytingalgebra, die direkt auf die intuitionistische Prädikatenlogik und auf ITE zu verallgemeinern ist und auch für diese Systeme ohne Schnitt Vollständigkeitsbeweise ermöglicht. Tatsächlich handelt es sich um die Definition der Heytingalgebra, die von Buchholz zum Beweis der Zulässigkeit der Schnittregel für IT verwendet wurde ([1]; die dort benutzten Bezeichnungen werden hier zum Teil übernommen). Im zweiten Abschnitt von Kapitel II. werden den intuitionistischen Kalkülen analoge Ergebnisse für die klassischen Systeme entwickelt; die geeigne-

ten Booleschen Algebren ergeben sich als Mengen von Inkonsistenzeigenschaften.

Von Schütte, Beth und Hintikka wurden Methoden entwickelt, die Vollständigkeit der Prädikatenlogik ohne Schnitt dadurch zu zeigen, daß man eine Formel sukzessiv in ihre Subformeln zerlegt und dann aus den dabei gewonnenen Atomformeln eine Struktur definiert, in der jene Formel erfüllbar ist. Eine verallgemeinerte, abstrakte Fassung dieses Prinzips wurde von Smullyan unter der Bezeichnung "Unifying Principle" dargestellt (siehe [8]): Anstelle von **einer** konsistenten Formelmenge, die man durch Auflösung einer oder mehrerer Formeln erhält, werden **Mengen** von Formelmengen betrachtet, die gewissen Abgeschlossenheitsbedingungen in bezug auf Formelauflösungen genügen; die Gesamtheit dieser Mengen heißt "Konsistenzeigenschaft".
In der Anwendung dieser Methode auf unendliche Sprachen trägt der zentrale Satz den Namen "Model-Existence-Theorem" (siehe [4]); diese Bezeichnung wird auch in der vorliegenden Arbeit verwendet. In allen Anwendungen der allgemeinen Forcing-Methode, wie sie von Keisler (in [5]) formuliert wurde, spielt das "Generic-Model-Theorem" eine ebenso zentrale Rolle. Die Ähnlichkeiten in den Beweisen dieser beiden Theoreme haben mich veranlaßt, die zwischen ihnen bestehenden Beziehungen genauer herauszuarbeiten. In Kapitel III. wird (für den einfacheren Fall der Prädikatenlogik) dargestellt, daß man die Konstruktion aus dem "Generic-Model-Theorem" als eine abstrakte Form der im "Model-Existence-Theorem" verwandten betrachten kann; dabei ist die Auffassung

der Forcing-Relation als einer Kripke-Struktur über einem konstanten Individuenbereich nützlich.

Aufgrund der Entsprechung des Erfüllbarkeitsbegriffes für Kripke-Strukturen über konstantem Individuenbereich und Heyting-wertigen Strukturen in der Prädikatenlogik (wie sie zum Beispiel in [3] für Modelle der Mengenlehre ausgenutzt wird) drängte sich mir der Gedanke auf, die in Kapitel III. beschriebenen Beziehungen für die Systeme ITE und KTE nutzbar zu machen. Wenngleich dies - im wesentlichen wegen der Regel (E) - nicht direkt geht, ergab sich mittelbar ein geeigneter Ansatz zur Definition einer zunächst Heyting-wertigen und damit dann einer Boolesch-wertigen Struktur für KTE ohne Schnitt. Einzelheiten über diese Zusammenhänge sind am Ende des ditten und am Anfang des vierten Kapitels erläutert, woran sich dann der daraus gewonnene Vollständigkeitsbeweis anschließt.

I. DIE KALKÜLE ITE UND KTE

§1. Die Sprache der einfachen Typenlogik ist folgendermaßen aufgebaut:

Typen: 0 ist ein Typ; wenn $\tau_1,\ldots,\tau_n$ Typen sind, dann ist $(\tau_1,\ldots,\tau_n)$ ein Typ.

Alphabet: Zu jedem Typ τ seien zwei disjunkte, abzählbare Mengen von Variablen gegeben: die Menge der freien Variablen, welche mit $a^\tau, b^\tau, c^\tau \ldots$ bezeichnet werden, und die Menge der gebundenen Variablen, welche mit $x^\tau, y^\tau, z^\tau \ldots$ bezeichnet werden. Mit v^τ seien freie oder gebundene Variablen vom Typ τ bezeichnet.
Zu jedem Typ τ hat man höchstens abzählbar viele Konstanten k^τ. Es gibt höchstens abzählbar viele endlichstellige Funktionen f (für Objekte vom Typ 0).
Schließlich hat man noch eine Aussagenkonstante $\bigwedge$.

Logische Zeichen: $\wedge, \vee, \rightarrow, \forall, \exists$; λ, ε ($\neg$ wird wie üblich durch $\rightarrow$ und $\bigwedge$ definiert werden; im klassischen Fall wird $\neg$ auch als undefiniert und $\rightarrow$ als durch $\neg$ und $\vee$ definiert betrachtet werden.)

Semi-Terme und Semi-Formeln:

1) Variable und Konstanten vom Typ τ sind Semi-Terme vom Typ τ.

2) Wenn $t_1,\ldots,t_n$ Semi-Terme vom Typ 0 sind und f eine n-stellige Funktion ist, dann ist $f(t_1,..,t_n)$ ein Semi-Term vom Typ 0.

3) Wenn $t_1^{\tau_1},\ldots,t_n^{\tau_n}$ Semi-Terme vom Typ $\tau_1,\ldots,\tau_n$ sind und t^τ ein Semi-Term vom Typ $\tau = (\tau_1,\ldots,\tau_n)$

ist, dann ist $t_1^{\tau_1}, \ldots, t_n^{\tau_n} \in t^{\tau}$ eine Semi-Formel.

4) Wenn A_1 und A_2 Semi-Formeln sind und x^{τ} eine gebundene Variable ist, dann sind $A_1 \wedge A_2$, $A_1 \vee A_2$, $A_1 \rightarrow A_2$, $\forall x^{\tau} A_1$, $\exists x^{\tau} A_1$ Semi-Formeln.

5) Wenn A eine Semi-Formel ist und $x_1^{\tau_1}, \ldots, x_n^{\tau_n}$ verschiedene gebundene Variablen vom Typ $\tau_1, \ldots, \tau_n$ sind, dann ist $\lambda x_1^{\tau_1} \ldots x_n^{\tau_n} A$ ein Semi-Term vom Typ $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$.

Im folgenden werden Superskripte "τ" weggelassen, soweit klar bzw. irrelevant ist, welche Typen jeweils gemeint sind.

Terme bzw. Formeln sind Semi-Terme bzw. Semi-Formeln, in denen keine gebundenen Variablen frei vorkommen. Die Menge der Formeln werde mit Fm, die Menge der Terme (vom Typ τ) mit Tm (Tm^{τ}) bezeichnet.

Für einen Semi-Term t bedeutet die Schreibweise "$t(v_1^{\tau_1}, \ldots, v_n^{\tau_n})$" daß die Variablen $v_i^{\tau_i}$ $(1 \leq i \leq n)$ frei in t vorkommen können; für Semi-Terme $t_1^{\tau_1}, \ldots, t_n^{\tau_n}$ bezeichnet "$t(t_1^{\tau_1}, \ldots, t_n^{\tau_n})$" dann das Ergebnis der simultanen Substitution der $v_1^{\tau_1}, \ldots, v_n^{\tau_n}$ durch die $t_1^{\tau_1}, \ldots, t_n^{\tau_n}$ in t. Entsprechend schreibt man "$A(v_1^{\tau_1}, \ldots, v_n^{\tau_n})$" und "$A(t_1^{\tau_1}, \ldots, t_n^{\tau_n})$" bei simultaner Substitution der Variablen $v_1^{\tau_1}, \ldots, v_n^{\tau_n}$ durch die Semi-Terme $t_1^{\tau_1}, \ldots, t_n^{\tau_n}$ in der Semi-Formel A. Eine ausführliche Darstellung des hier verwendeten Substitutionsbegriffes findet sich auch bei Takahashi ([12]).

IT und KT seien die Systeme der intuitionistischen bzw. klassischen einfachen Typentheorie, dargestellt als Sequenzenkalküle in Mengenschreibweise (Sequenzen sind Paare von Formelmengen).

Die Sequenzen von IT dürfen also im Gegensatz zu denen von KT auf der rechten Seite höchstens eine Formel zu stehen haben. Die strukturellen Regeln sind Abschwächung (mit der entsprechenden Einschränkung für IT) und Schnitt. Axiome sind Sequenzen der Form $A \Rightarrow A$ und $\Lambda \Rightarrow$. Man hat die bekannten Regeln für $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, zu welchen im Fall KT die klassischen Negationsregeln hinzukommen. Die Regeln für $\forall$ und $\exists$ sind (für KT) die folgenden:

$$(\forall E)\quad \frac{M,\ A(t^\tau) \Rightarrow N}{M,\ \forall x^\tau A(x^\tau) \Rightarrow N} \qquad (\forall I)\quad \frac{M \Rightarrow N,\ A(a^\tau)}{M \Rightarrow N,\ \forall x^\tau A(x^\tau)}$$

$$(\exists E)\quad \frac{M,\ A(a^\tau) \Rightarrow N}{M,\ \exists x^\tau A(x^\tau) \Rightarrow N} \qquad (\exists I)\quad \frac{M \Rightarrow N,\ A(t^\tau)}{M \Rightarrow N,\ \exists x^\tau A(x^\tau)}$$

wobei in den Fällen ($\forall$E) und ($\exists$I) $t^\tau \in \mathrm{Tm}^\tau$ gelten soll und in den Fällen ($\forall$I) und ($\exists$E) die Variable a^τ nicht in einer Formel der Konklusion vorkommen darf.

Die λ-Konversionsregeln sehen (für KT) wie folgt aus:

$$(\mathrm{KonvE})\quad \frac{M,\ A(t_1^{\tau_1},\ldots,t_n^{\tau_n}) \Rightarrow N}{M,\ t_1^{\tau_1},\ldots,t_n^{\tau_n} \in \lambda x_1^{\tau_1}\ldots x_n^{\tau_n} A(x_1^{\tau_1},\ldots,x_n^{\tau_n}) \Rightarrow N}$$

$$(\mathrm{KonvI})\quad \frac{M \Rightarrow N,\ A(t_1^{\tau_1},\ldots,t_n^{\tau_n})}{M \Rightarrow N,\ t_1^{\tau_1},\ldots,t_n^{\tau_n} \in \lambda x_1^{\tau_1}\ldots x_n^{\tau_n} A(x_1^{\tau_1},\ldots,x_n^{\tau_n})}$$

wobei $t_i^{\tau_i} \in \mathrm{Tm}^{\tau_i}$ gelten soll (für $1 \leq i \leq n$).

Die Kalküle ITExt und KTExt erhält man durch Hinzunahme der Regel (Ext) (im intuitionistischen Fall ist $N = \emptyset$):

$$\frac{M, a_{i_1},\ldots,a_{ir_i} \in b_i \Rightarrow N, a_{i_1},\ldots,a_{ir_i} \in c_i \qquad M, a_{i_1},\ldots,a_{ir_i} \in c_i \Rightarrow N, a_{i_1},\ldots,a_{ir_i} \in b_i}{M,\ b_1',\ldots,b_n',\ \varepsilon\ u \Rightarrow N,\ c_1',\ldots,c_n',\ \varepsilon\ u}$$

wobei 1. i die Zahlen 1 bis n durchläuft (die Regel hat also 2n

Prämissen), die a_{ij} paarweise verschiedene Variable sind, welche nicht in M oder N vorkommen, u eine freie Variable oder Konstante (passenden Typs) ist;

2. $n \leq n'$ ist und eine Funktion p von $\{1,\ldots,n\}$ nach $\{1,\ldots,n'\}$ existiert, sodaß $b_i = b'_{p(i)}$, $c_i = c'_{p(i)}$ für $1 \leq i \leq n$ gilt und b'_j, c'_j Terme vom Typ O sind mit $b'_j = c'_j$ für $j \in \{1,\ldots,n'\} \setminus \mathrm{im}(p)$.

Man definiere $G_i = \forall x_{i1} \ldots x_{ir_i} (x_{i1},..,x_{ir_i} \varepsilon x_i \leftrightarrow x_{i1},..,x_{ir_i} \varepsilon y_i)$ für $1 \leq i \leq n$ und $G = \forall x'_1 \ldots x'_{n'} \forall y'_1 \ldots y'_{n'} (\bigwedge_{i=1}^{n} G_i \rightarrow \forall z(x'_1,..,x'_{n'} \varepsilon z \leftrightarrow y'_1,..,y'_{n'} \varepsilon z))$, wobei die $x_1,..,x_n$ und $y_1,..,y_n$ mit den $x'_1,..,x'_{n'}$ und $y'_1,..,y'_{n'}$ wie die $b_1,..,b_n$ und $c_1,..,c_n$ mit den $b'_1,..,b'_{n'}$ und $c'_1,..,c'_{n'}$ in der Regel (Ext) zusammenhängen. In IT oder KT gilt, daß die Formel G genau dann beweisbar ist, wenn (Ext) zulässige Regel ist. Aus G folgt die Zulässigkeit der folgenden Regel (E):

$$\frac{a_{i1},..,a_{ir_i} \varepsilon s_i \Rightarrow a_{i1},..,a_{ir_i} \varepsilon t_i \quad a_{i1},..,a_{ir_i} \varepsilon t_i \Rightarrow a_{i1},..,a_{ir_i} \varepsilon s_i}{s'_1,..,s'_{n'} \varepsilon u \Rightarrow t'_1,..,t'_{n'} \varepsilon u}$$

wobei 1. i die Zahlen 1 bis n durchläuft, die a_{ij} paarweise verschiedene Variable sind, welche nicht in den Termen s_i und t_i (für $1 \leq i \leq n$) vorkommen, u eine freie Variable oder Konstante ist;

2. $n \leq n'$ ist und eine Funktion p von $\{1,\ldots,n\}$ nach $\{1,\ldots,n'\}$ existiert, sodaß $s_i = s'_{p(i)}$, $t_i = t'_{p(i)}$ für $1 \leq i \leq$ gilt und s'_j, t'_j Terme vom Typ O sind mit $s'_j = t'_j$ für $j \in \{1,\ldots,n'\} \setminus \mathrm{im}(p)$.

ITE und KTE seien die durch die Regel (E) verstärkten Kalküle

IT beziehungsweise KT.

Man nenne zwei Terme s^τ, t^τ "logisch äquivalent" (bzgl. ITE oder KTE), falls entweder $\tau = 0$ ist und s und t dieselben Terme sind oder $\tau = (\tau_1,\ldots,\tau_n)$ ist und für irgendwelche paarweise verschiedene freie Variablen $a_1^{\tau_1},\ldots,a_n^{\tau_n}$, welche nicht in s oder t vorkommen, die Formel $a_1,..,a_n \varepsilon s \leftrightarrow a_1,..,a_n \varepsilon t$ beweisbar ist (in ITE oder KTE).- Zum Beispiel sind die beiden Terme $s = \lambda x_1^{\tau_1}..x_n^{\tau_n} A(x_1^{\tau_1},..,x_n^{\tau_n})$ und $t = \lambda x_1^{\tau_1}..x_n^{\tau_n} B(x_1^{\tau_1},..,x_n^{\tau_n})$ genau dann logisch äquivalent, wenn für verschiedene freie Variable $a_1^{\tau_1},\ldots,a_n^{\tau_n}$, welche nicht in s oder t vorkommen, die Formeln $A(a_1^{\tau_1},..,a_n^{\tau_n})$ und $B(a_1^{\tau_1},..,a_n^{\tau_n})$ logisch äquivalent sind.
Man hat das folgende Substitutivitätsprinzip:
Für alle Semi-Formeln $A(v_1^{\tau_1},..,v_n^{\tau_n})$, Semi-Terme $t(v_1^{\tau_n},..,v_n^{\tau_n})$, Terme $s_1^{\tau_1},\ldots,s_n^{\tau_n}$, $t_1^{\tau_1},\ldots,t_n^{\tau_n}$ gilt: Wenn die Menge der in A bzw. t frei vorkommenden Variablen in $\{v_1^{\tau_1},\ldots,v_n^{\tau_n}\}$ enthalten ist und s_i und t_i logisch äquivalent sind (für $1 \leq i \leq n$), dann sind $A(s_1,..,s_n)$ und $A(t_1,..,t_n)$ bzw. $t(s_1,..,s_n)$ und $t(t_1,..,t_n)$ logisch äquivalent.

Beweis:

1) Wenn t eine Variable oder Konstante oder ein Term vom Typ 0 ist, folgt die Behauptung unmittelbar.

2) $A = e_1,..,e_m \varepsilon e_0$:
Nach Ind.ann. sind $e_i(s_1,..,s_n)$ und $e_i(t_1,..,t_n)$ logisch äquivalent (für $1 \leq i \leq m$). Mit (E) folgt daraus, daß $e_1(s_1,..,s_n),..,e_m(s_1,..,s_n) \varepsilon u$ und $e_1(t_1,..,t_n),..,e_m(t_1,..,t_n) \varepsilon u$ logisch äquivalent sind für

eine beliebige freie Variable u (von passendem Typ). Also ist $e_1(s_1,..,s_n),..,e_m(s_1,..,s_n)\,\varepsilon\, e_o(s_1,..,s_n) \Rightarrow$ $e_1(t_1,..,t_n),..,e_m(t_1,..,t_n)\,\varepsilon\, e_o(s_1,..,s_n)$ beweisbar. Nach Ind.ann. sind $e_o(s_1,..,s_n)$ und $e_o(t_1,..,t_n)$ logisch äquivalent. Mit Schnitt folgt also die Beweisbarkeit von $e_1(s_1,..,s_n),..,e_m(s_1,..,s_n)\,\varepsilon\, e_o(s_1,..,s_n) \Rightarrow$ $e_1(t_1,..,t_n),..,e_m(t_1,..,t_n)\,\varepsilon\, e_o(t_1,..,t_n)$, d,h. von $A(s_1,..,s_n) \Rightarrow A(t_1,..,t_n)$.

Entsprechend argumentiert man für $A(t_1,..,t_n) \Rightarrow A(s_1,..,s_n)$.

3) Die aussagen- und quantorenlogischen Fälle werden wie in den bekannten Beweisen dafür, daß logische Äquivalenz eine Kongruenzrelation definiert, behandelt.

4) $t = \lambda y_1..y_m A$ $(A = A(y_1,..,y_m,v_1,..,v_n))$:
Nach Ind.ann. sind $A(b_1,..,b_m,s_1,..,s_n)$ und $A(b_1,..,b_m,t_1,..,t_n)$ logisch äquivalent, wobei $b_1,..,b_m$ verschiedene freie Variable passenden Typs sind, welche nicht in t, s_i oder t_i $(1 \leq i \leq n)$ vorkommen. Mit (KonvE) und (KonvI) folgt daraus die logische Äquivalenz von $b_1,..,b_m\,\varepsilon\, t(s_1,..,s_n$ und $b_1,..,b_m\,\varepsilon\, t(t_1,..,t_n)$.

§2. Gegeben sei eine Heyting-Algebra $\mathcal{A}$ und eine Familie von Mengen $\langle A^\tau\rangle_\tau$, wobei τ alle Typen durchläuft.
$\langle A^\tau\rangle_\tau$ ist eine $\mathcal{A}$-wertige Prästruktur (für die zugrundeliegende Sprache der Typenlogik), wenn gilt:

(i) A^o ist eine Algebra vom gleichen Typ wie die Algebra der Terme vom Typ 0 der gegebenen Sprache.

(ii) Für $\tau = (\tau_1,...,\tau_n)$ ist $A^\tau \subseteq \mathcal{A}^{A^{\tau_1} \times ... \times A^{\tau_n}}$.

(iii) Jeder Konstanten k^τ ist ein $\bar{k} \in A^\tau$ zugeordnet.

Eine Belegung φ in die Prästruktur ist eine Funktion, die jeder Variablen v^τ ein Element $\varphi(v^\tau)$ aus A^τ und jedem k^τ $\bar{k}$ zuordnet. $\langle A^\tau \rangle_\tau$ ist eine $\mathcal{A}$-wertige Struktur, wenn sich jede Belegung φ so zu einer Funktion v_φ auf der Menge aller Semi-Terme und Semi-Formeln - einer Bewertung - fortsetzen läßt, daß $v_\varphi(t^\tau) \in A^\tau$ und $v_\varphi(A) \in \mathcal{A}$ gilt und die folgenden rekursiven Bedingungen erfüllt sind:

1) Für Variable und Konstanten u ist $v_\varphi(u) = \varphi(u)$.

2) Für Semi-Terme $f(t_1,..,t_n)$ ist $v_\varphi(f(t_1,..,t_n)) = \bar{f}(v_\varphi(t_1),..,v_\varphi(t_n))$, wobei $\bar{f}$ die f entsprechende Funktion in A^0 ist.

3) $v_\varphi(t_1,..,t_n \varepsilon t) = v_\varphi(t)(v_\varphi(t_1),..,v_\varphi(t_n))$

4) $v_\varphi(A_1 \wedge A_2) = v_\varphi(A_1) \cap v_\varphi(A_2)$

$v_\varphi(A_1 \vee A_2) = v_\varphi(A_1) \cup v_\varphi(A_2)$

$v_\varphi(A_1 \to A_2) = v_\varphi(A_1) \supset v_\varphi(A_2)$

$v_\varphi(\Lambda) = 0_{\mathcal{A}}$

wobei $\cap$, $\cup$, $\supset$, $0_{\mathcal{A}}$ das Infimum, Supremum, relative Pseudokomplement, kleinste Element in $\mathcal{A}$ bezeichnen.

$v_\varphi(\forall x^\tau A) = \bigcap \langle v_{\varphi'}(A) \mid \varphi' =_{x^\tau} \varphi \rangle$

$v_\varphi(\exists x^\tau A) = \bigcup \langle v_{\varphi'}(A) \mid \varphi' =_{x^\tau} \varphi \rangle$

wobei die rechten Seiten der Gleichungen das Infimum bzw. Supremum über alle Werte $v_{\varphi'}(A)$ bezeichnen, wo φ' eine Belegung ist, die sich von φ höchstens an der Stelle x^τ unterscheidet. (Für Infima und Suprema dieser Sorte muß $\mathcal{A}$ also vollständig sein.)

5) $v_\varphi(\lambda x_1^{\tau_1} .. x_n^{\tau_n} A)(a_1,..,a_n) = v_{\varphi'}(A)$, wobei für alle a_i aus A^{τ_i}

(für $1 \leq i \leq n$) die Belegung φ' folgendermaßen definiert ist:

$$\varphi'(v) = \begin{cases} a_i & \text{falls } v = x_i \text{ ist (für ein } i \leq n) \\ \varphi(v) & \text{sonst} \end{cases}$$

Wenn $\mathfrak{A}$ eine Boolesche Algebra ist und die zugrundeliegende Sprache $\neg$ statt $\rightarrow$ als undefiniertes Zeichen hat, verlangt man in 4) natürlich $v_\varphi(\neg A) = -v_\varphi(A)$.

Eine ITE-Sequenz $A_1,..,A_n \Rightarrow B$ (bzw. eine KTE-Sequenz $A_1,..,A_n \Rightarrow B_1,..,B_m$) heißt <u>erfüllbar</u> in einer Heyting- (bzw. Boolesch-) wertigen Struktur $\langle A^\tau \rangle_\tau$, wenn eine Belegung φ in $\langle A^\tau \rangle_\tau$ existiert mit $v_\varphi(A_1) \cap .. \cap v_\varphi(A_n) \leq v_\varphi(B)$ (bzw. $v_\varphi(A_1) \cap .. \cap v_\varphi(A_n) \leq v_\varphi(B_1) \cup .. \cup v_\varphi(B_m)$); die Sequenz heißt <u>wahr</u>, wenn sie in jeder Struktur von jeder Belegung erfüllt wird.

Es gilt der <u>Satz von der Korrektheit von ITE (bzw. KTE)</u>:
Jede in ITE (bzw. KTE) beweisbare Sequenz ist wahr bezüglich der Klasse aller Heyting- (bzw. Boolesch-) wertigen Strukturen.

Der <u>Beweis</u> wird durch Induktion über die Länge des Beweises der Sequenz geführt. Es soll hier nur der Fall betrachtet werden, in welchem der vorgelegte Beweis mit einer (E)-Regel endet. Man wird daraus ersehen, warum in den Prämissen dieser Regel keine Parameterformeln auftreten dürfen:
Gegeben sei eine Struktur $\langle A^\tau \rangle_\tau$ und eine Belegung φ. Nach Ind. ann. gilt für alle Belegungen ψ $v_\psi(a_{i_1},..,a_{i_{r_i}} \varepsilon s_i) = v_\psi(a_{i_1},..,a_{i_{r_i}} \varepsilon t_i)$ (für $1 \leq i \leq n$), insbesondere für alle ψ, welche mit φ außerhalb der Stellen a_{ij} ($1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$) übereinstimmen. Wegen der Bedingung 1. für die (E)-Regel folgt unter Beachtung von 3) in der Definition von "Struktur" $v_\varphi(s_i) = v_\varphi(t_i)$

für $1 \leq i \leq n$, also auch $v_\varphi(u)(v_\varphi(s_1'),..,v_\varphi(s_{n'}')) =$
$= v_\varphi(u)(v_\varphi(t_1'),..,v_\varphi(t_{n'}'))$.

Im folgenden wird gezeigt, daß die Hinzunahme von (E) zu IT bzw. KT für die Vollständigkeit bezüglich der angegebenen Strukturklassen ausreicht.

Es gilt der Satz von der Vollständigkeit von ITE (bzw. KTE): Jede bezüglich der Klasse aller Heyting- (bzw. Boolesch-) wertigen Strukturen wahre Formel ist beweisbar in ITE (bzw. KTE). (Die Behauptung für beliebige Sequenzen folgt hieraus.)

Beweis: (Das Folgende soll sich immer auf ITE beziehen, für KTE verfährt man genau entsprechend.)

Auf Fm definiere man eine Quasiordnung $\trianglelefteq$ durch: Es gilt $A \trianglelefteq B$ genau dann, wenn $A \Rightarrow B$ beweisbar ist. Die durch $\trianglelefteq$ definierte Äquivalenzrelation sei mit $\sim$, die zugehörige Restklassenabbildung mit π bezeichnet; man setze $\mathfrak{L} = \pi(\mathrm{Fm})$. Wie im Fall der Prädikatenlogik zeigt man, daß $\sim$ eine Kongruenzrelation und $\mathfrak{L}$ eine Heytingalgebra - die Lindenbaumalgebra (für ITE) - ist. Ebenso zeigt man, daß für jede Formel $A(a^\tau)$ das Supremum (bzw. Infimum) von $\langle \pi(A(t^\tau)) \mid t^\tau \in \mathrm{Tm}^\tau \rangle$ existiert und gleich $\pi(\exists x^\tau A(x^\tau))$ (bzw. $\pi(\forall x^\tau A(x^\tau))$) ist.

Es wird nun eine $\mathfrak{L}$-wertige Prästruktur $\langle A^\tau \rangle_\tau$ zusammen mit einer Funktion auf der Menge der Terme, die durch $t^\tau \to a_t{}^\tau$ bezeichnet sei, definiert.

1. $\tau = 0$: Setze $A^0 = \mathrm{Tm}^0$ und $a_t{}^0 = t^0$.
2. $\tau = (\tau_1,\ldots,\tau_n)$: Für Typen τ' von kleinerer Komplexität

als τ seien $A^{\tau'}$ und $\tau^{\tau'} \to a_t\tau'$ bereits so definiert, daß $A^{\tau'} = \{a_t\tau' \mid t^{\tau'} \in Tm^{\tau'}\}$ gilt. Dann definiert man $a_{t^\tau}(a_{t_1}\tau_1,\ldots,a_{t_n}\tau_n) = \pi(t_1^{\tau_1},..,t_n^{\tau_n} \in t^\tau)$ für alle $t^\tau \in Tm^\tau$ und $A^\tau = \{a_t\tau \mid t^\tau \in Tm^\tau\}$.

Man beachte, daß diese Definition repräsentantenunabhängig und damit korrekt ist:

Falls für irgendwelche $s_i^{\tau_i} \in Tm^{\tau_i}$ $a_{t_i} = a_{s_i}$ (für $1 \leq i \leq n$) gilt, hat man für beliebige $a_{ij} \in A^{\tau_{ij}}$ $a_{t_i}(a_{i_1},..,a_{i_{r_i}}) = a_{s_i}(a_{i_1},..,a_{i_{r_i}})$, speziell für $a_{ij} = a_{v_{ij}}$, wobei die v_{ij} beliebige freie Variable vom Typ τ_{ij} sind. Nach Ind.ann. folgt daraus die logische Äquivalenz von t_i und s_i (für $1 \leq i \leq n$), unter Benützung des Substitutivitätsprinzips also die logische Äquivalenz von $t_1,..,t_n \in t$ und $s_1,..,s_n \in t$.

Aus der Definition von $\langle A^\tau \rangle_\tau$ ersieht man sofort: Es gilt $a_s = a_t$ genau dann, wenn s und t logisch äquivalent sind. Mit Hilfe des Substitutivitätsprinzips folgt daraus: Wenn $a_{s_i}\tau_i = a_{t_i}\tau_i$ für $1 \leq i \leq n$ gilt, dann gilt $\pi(A(s_1^{\tau_1},..,s_n^{\tau_n})) = \pi(A(t_1^{\tau_1},..,t_n^{\tau_n}))$ für alle Semi-Formeln $A(v_1^{\tau_1},..,v_n^{\tau_n})$ bzw. $a_{t(s_1^{\tau_1},..,s_n^{\tau_n})} = a_{t(t_1^{\tau_1},..,t_n^{\tau_n})}$ für alle Semi-Terme $t(v_1^{\tau_1},..,v_n^{\tau_n})$, sofern die Menge der in A bzw. t frei vorkommenden Variablen in $\{v_1^{\tau_1},..,v_n^{\tau_n}\}$ enthalten ist. Damit kann man das folgende Theorem formulieren, aus welchem folgt, daß $\langle A^\tau \rangle_\tau$ eine Struktur ist.

Theorem: Für alle Semi-Formeln A, Semi-Terme t, Terme $t_1,..,t_n$ und alle Belegungen φ in $\langle A^\tau \rangle_\tau$ gilt: Wenn die Menge der in A bzw. t frei vorkommenden Variablen in $\{v_1^{\tau_1},..,v_n^{\tau_n}\}$ enthalten und $\varphi(v_i) = a_{t_i}$ (für $1 \leq i \leq n$) ist, dann gilt $v_\varphi(A(v_1,..,v_n)) = \pi(A(t_1,..,t_n))$ bzw.

$$\upsilon_\varphi(t(v_1,..,v_n)) = a_{t(t_1,..,t_n)}$$

Beweis:

1) $t = v$: Man hat $v = v_i$ für ein $i \leq n$, also $\upsilon_\varphi(v_i) = a_{t_i}$.

   $t = k$: $\upsilon_\varphi(k) = a_k$.

2) Für Semi-Terme vom Typ 0 sind Belegungen Termsubstitutionen.

3) $A = s_1,..,s_m \varepsilon s_0$:

$$\begin{aligned}\upsilon_\varphi(A) &= \upsilon_\varphi(s_0)(\upsilon_\varphi(s_1),..,\upsilon_\varphi(s_m))\\ &= a_{s_0(t_1,..,t_n)}\ (a_{s_1(t_1,..,t_n)},..,a_{s_m(t_1,..,t_n)})\\ &= \pi(s_1(t_1,..,t_n),..,s_m(t_1,..,t_n)\,\varepsilon\, s_0(t_1,..,t_n))\\ &= \pi(A(t_1,..,t_n)\end{aligned}$$

4) $A = A_1 \to A_2$:

$$\begin{aligned}\upsilon_\varphi(A) &= \upsilon_\varphi(A_1) \supset \upsilon_\varphi(A_2) = \pi(A_1(t_1,..,t_n)) \supset \pi(A_2(t_1,..,t_n))\\ &= \pi(A_1(t_1,..,t_n) \to A(t_1,..,t_n)) = \pi(A(t_1,..,t_n))\end{aligned}$$

Entsprechendes gilt für die anderen aussagenlogischen Operationen.

$A = \exists x^\tau A_1$ $(A_1 = A_1(x^\tau, v_1,..,v_n))$:

Es gilt $\pi(\exists x^\tau A_1(x^\tau, t_1,..,t_n)) = \bigcup\langle \pi(A_1(t^\tau, t_1,..,t_n)) \mid t^\tau \in T\mathfrak{m}^\tau\rangle$

und nach Ind.ann. $\pi(A_1(t^\tau, t_1,..,t_n)) = \upsilon_{\varphi'}(A_1)$ für

$$\varphi'(v) = \begin{cases}\varphi(v) & \text{für } v \neq x^\tau\\ a_{t^\tau} & \text{für } v = x^\tau\end{cases}$$

5) $t = \lambda y_1..y_m A$ $(A = A(y_1,..,y_m x_1,..,x_n))$:

$$\begin{aligned}a_{t(t_1,..,t_n)}(a_{s_1},..,a_{s_m}) &= \pi(s_1,..,s_m\,\varepsilon\, t(t_1,..,t_n))\\ &= \pi(A(s_1,..,s_m,t_1,..,t_n))\\ &= \upsilon_{\varphi'}(A)\end{aligned}$$

für $$\varphi'(v) = \begin{cases}a_{s_j} & \text{für } v = y_j \quad (1 \leq j \leq m)\\ \varphi(v) & \text{sonst}\end{cases}$$

Es sei nun ι eine Belegung mit $\iota(v) = a_v$ für alle freien Variablen v. Dann ist $\upsilon_\iota(A) = \pi(A)$ für alle Formeln A.
Aus $\upsilon_\iota(A) \neq 1$ folgt also, daß A beweisbar ist. Damit ist der Vollständigkeitssatz bewiesen.

Bemerkung zur Substitution:

In dem Beweis des obigen Theorems (wie schon in dem des Substitutivitätsprinzips) wird in den Fällen der Quantorenformeln und λ-Terme davon Gebrauch gemacht, daß die Hintereinander-Ausführung zweier Substitutionen dasselbe ergibt wie eine simultane Substitution. (z.B.: In $A_1(x^\tau, v_1, \ldots, v_n)$ zuerst $v_1, \ldots, v_n$ durch $t_1, \ldots, t_n$ und anschließend x^τ durch t^τ substituiert ergibt dasselbe wie simultan $x^\tau, v_1, \ldots, v_n$ durch $t^\tau, t_1, \ldots, t_n$ substituiert.) Dies ist wegen des Aufbaus der Sprache aus zwei Sorten von Variablen - den freien und den gebundenen - unproblematisch. Anders als bei der Verwendung von nur einer Sorte von Variablen braucht man keine Form der gebundenen Umbenennung, um die Korrektheit bei Substitution von Variablen durch beliebige Terme zu sichern.
Für die Überlegungen, die in den beiden nächsten Kapiteln zur Prädikatenlogik angestellt werden, müssen keine Hintereinander-Ausführungen von Substitutionen betrachtet werden. Wenn im folgenden eine prädikatenlogische Sprache verwendet wird, soll diese daher immer aus einer Sorte von Variablen aufgebaut sein. Die Substitution soll durch die Funktion sub(-|-) wie in [2] p. 160 definiert sein, und wie bisher wird die Schreibweise

"A(x)" und "A(t)" statt "sub(x,t|A)" gebraucht werden.

II. KONSTRUKTION ALGEBRAISCHER MODELLE AUS KALKÜLEN OHNE SCHNITT

A. Intuitionistische Logik

§1. Im folgenden werde zunächst die intuitionistische Aussagenlogik (in Form des in Kapitel I beschriebenen Sequenzenkalküls) betrachtet. Zur Unterscheidung von weiter unten einzuführenden Relationen sei die für die Konstruktion der Lindenbaumalgebra verwendete Quasiordnung $\leq$ mit $\leq_0$ bezeichnet, entsprechend werden die zugehörige Äquivalenzrelation und Restklassenabbildung mit $\sim_0$ und π_0 bezeichnet.
Es fällt auf, daß die einzige Stelle in jener Konstruktion, an der notwendig die Schnittregel eingeht, der Nachweis der Transitivität von $\leq_0$ ist. Für den Nachweis der Kongruenzeigenschaften und den Beweis, daß $\pi_0(\mathrm{Fm})$ eine Heytingalgebra ist, kommt man mit den logischen Regeln und der Abschwächung aus. Im Fall der Pfeiloperation sei dies kurz dargestellt:

a) Es sei $A_i \sim_0 A_i'$ $(i = 1,2)$, d.h. $A_i \leq_0 A_i'$ und $A_i' \leq_0 A_i$. Die folgende Ableitung zeigt, daß daraus $A_1 \to A_2 \Rightarrow A_1' \to A_2'$ folgt:

$$\dfrac{\dfrac{A_1' \Rightarrow A_1 \qquad \dfrac{A_2 \Rightarrow A_2'}{A_1',\ A_2 \Rightarrow A_2'}}{A_1',\ A_1 \to A_2 \Rightarrow A_2'}}{A_1 \to A_2 \Rightarrow A_1' \to A_2'}$$

Entsprechend beweist man $A_1' \to A_2' \Rightarrow A_1 \to A_2$.

b) $\pi_0(A_1 \to A_2)$ ist relatives Pseudokomplement von $\pi_0(A_1)$ und $\pi_0(A_2)$:

$$\dfrac{\dfrac{A_1 \Rightarrow A_1 \qquad A_1, A_2 \Rightarrow A_2}{A_1,\ A_1 \to A_2 \Rightarrow A_2}}{A_1 \wedge (A_1 \to A_2) \Rightarrow A_2}$$

Diese Ableitung zeigt, daß $A_1 \wedge (A_1 \to A_2) \leq_0 A_2$ gilt.

Wenn weiter $A \wedge A_1 \leq_0 A_2$ gilt, d.h. wenn $A \wedge A_1 \Rightarrow A_2$ beweisbar ist, dann ist auch $A, A_1 \Rightarrow A_2$, somit auch $A \Rightarrow A_1 \to A_2$ beweisbar, also gilt $A \leq_0 A_1 \to A_2$.

Von daher erhebt sich die Frage: Kann man $\leq_0$ so durch eine Relation $\leq_1$, welche das gleiche wie $\leq_0$ leistet, ersetzen, daß die Transitivität von $\leq_1$ ohne Verwendung des Schnittes gewährleistet ist?

Zur Notation: Man bezeichne zulässige Regeln mit "$\Longrightarrow$" (d.h. $\dfrac{S}{S'}$ bedeutet: Wenn S beweisbar ist, so ist auch S' beweisbar.)

Ein einfacher Kunstgriff zur Erzwingung der Transitivität ist die Hebung ins Metasprachliche: Man definiere

$A \leq_1 B$ genau dann, wenn $\dfrac{\Rightarrow A}{\Rightarrow B}$.

Damit ist $\leq_1$ zwar unmittelbar eine Quasiordnung; es ist aber überhaupt nicht zu sehen, wie die zugehörige Äquivalenzrelation $\sim_1$ die Kongruenzbedingung für $\to$ erfüllen sollte. Wenn $\sim_1$ eine Kongruenzrelation wäre, könnte man ohne Schnitt nicht zeigen, daß $\pi_1(A_1 \to A_2)$ relatives Pseudokomplement von $\pi_1(A_1)$ und $\pi_1(A_2)$ ist.

Anders ist die Situation, wenn man in der Definition von $\leq_1$ eine Relativierung auf beliebige Mengen von Antezedensformeln vornimmt: Man definiere

$A \leq_2 B$ genau dann, wenn für alle M $\dfrac{M \Rightarrow A}{M \Rightarrow A}$.

$\leq_2$ ist wieder unmittelbar eine Quasiordnung, und man kann unter Verwendung der Schnittregel zeigen, daß $\sim_2$ eine Kongruenzrelation und $\Pi_2(Fm)$ eine Heytingalgebra ist:

Im folgenden werde der Index 2 weggelassen ($\leq_2 = \leq$, $\sim_2 = \sim$, $\Pi_2 = \Pi$).

a) Es gelte $A_i \sim A_i'$ $(i = 1,2)$, d.h. $A_i \leq A_i'$ und $A_i' \leq A_i$.

Die beiden folgenden Ableitungen zeigen, daß dann auch $A_1 \vee A_2 \leq A_1' \vee A_2'$ und $A_1 \to A_2 \leq A_1' \to A_2'$ gilt.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A_i \Rightarrow A_i}{A_i \Rightarrow A_i'}}{A_i \Rightarrow A_1' \vee A_2'} \qquad \dfrac{M \Rightarrow A_1 \vee A_2 \qquad A_1 \vee A_2 \Rightarrow A_1' \vee A_2'}{M \Rightarrow A_1' \vee A_2'}}{}$$

$$\dfrac{\dfrac{M \Rightarrow A_1 \to A_2}{M,\ A_1' \Rightarrow A_1'} \qquad \dfrac{M \Rightarrow A_1 \to A_2}{M,\ A_1 \Rightarrow A_2}}{M,\ A_1' \Rightarrow A_1} \qquad \dfrac{M \Rightarrow A_1 \to A_2}{M,\ A_1 \Rightarrow A_2'}$$

$$\dfrac{M,\ A_1' \Rightarrow A_2'}{M \Rightarrow A_1' \to A_2'}$$

b) $\Pi(A_1 \vee A_2)$ ist Supremum von $\Pi(A_1)$ und $\Pi(A_2)$:

Aus $(\vee I)$ folgt direkt $\Pi(A_i) \leq \Pi(A_1 \vee A_2)$ für $i = 1,2$.

Wenn $\Pi(A_i) \leq \Pi(A)$ für $i = 1,2$ gilt, dann gilt auch $\Pi(A_1 \vee A_2) \leq \Pi(A)$ für eine beliebige Formel A:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A_1 \Rightarrow A_1}{A_1 \Rightarrow A} \qquad \dfrac{A_2 \Rightarrow A_2}{A_2 \Rightarrow A}}{M \Rightarrow A_1 \vee A_2 \qquad A_1 \vee A_2 \Rightarrow A}}{M \Rightarrow A}$$

$\Pi(A_1 \to A_2)$ ist relatives Pseudokomplement von $\Pi(A_1)$ und $\Pi(A_2)$:

Zunächst gilt $A_1 \wedge (A_1 \to A_2) \leq A_2$:

$$\dfrac{\dfrac{M \Rightarrow A_1 \wedge (A_1 \to A_2)}{M \Rightarrow A_1} \qquad \dfrac{M \Rightarrow A_1 \wedge (A_1 \to A_2)}{M \Rightarrow A_1 \to A_2}}{M,\ A_1 \Rightarrow A_2}$$

$$M \Rightarrow A_2$$

Außerdem folgt aus $A \wedge A_1 \leq A_2$ $A \leq A_1 \rightarrow A_2$ für ein beliebiges A:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{M \Rightarrow A \qquad M,\ A_1 \Rightarrow A_1}{M,\ A_1 \Rightarrow A \wedge A_1}}{M,\ A_1 \Rightarrow A_2}}{M \Rightarrow A_1 \rightarrow A_2}$$

Bemerkung: Für $\leq_i$ schreibe man R_i $(i = 0,1,2)$. Es gilt:

1. $R_2 \subseteq R_0 \subseteq R_1$
   (Für die erste Inklusion wähle man zu gegebenen Formeln A und B $M = \{A\}$; für die zweite benütze man den Schnitt)
2. Wenn man die R_i für das volle System ITE definiert und $A = x \varepsilon s \leftrightarrow x \varepsilon t$, $B = s \varepsilon u \rightarrow t \varepsilon u$ setzt, dann gilt $A\ R_1\ B$ aufgrund der Regel (E), aber nicht $A\ R_2\ B$, weil man dafür die volle Extensionalitätsregel (Ext) brauchte.

Mit der Einführung von $\leq_2$ hat man im Vergleich zu $\leq_0$ zunächst nur die Stelle verlagert, an der die Schnittregel eingeht; auf deren Verwendung konnte noch nicht verzichtet werden. Die folgende Überlegung führt aber weiter:
Man definiere eine Funktion p von Fm in die Potenzmenge von Fm, indem man jedem A die Menge aller M, für welche $M \Rightarrow A$ beweisbar ist (unter Einbeziehung der Schnittregel), zuordnet. Dann gilt
(1) $\pi(A) = \{B \mid p(A) = p(B)\}$ und
(2) $\pi(A) \leq \pi(B)$ genau dann, wenn $p(A) \subseteq p(B)$.
Wegen (1) ist die Abbildung F von $\pi(Fm)$ nach $p(Fm)$, welche $\pi(A)$ $p(A)$ zuordnet, eine Bijektion; wegen (2) folgt daraus, daß $p(Fm)$ eine zu $\pi(Fm)$ isomorphe Heytingalgebra ist.

Wenn man nun p_A für jedes A als die Menge aller M, für welche $M \Rightarrow A$ ohne Schnitt beweisbar ist, definiert, so hat man vermittels der Inklusion zwar unmittelbar eine Halbordnung auf der Menge $\{p_A \mid A \in Fm\}$; wie aber soll man die Existenz von Suprema und relativen Pseudokomplementen in dieser Menge nachweisen? Ohne Schnitt läßt sich nur $p_{A_1} \cup p_{A_2} \subseteq p_{A_1 \vee A_2}$ und: $p_A \cap p_{A_1} \subseteq p_{A_2}$ impliziert $p_A \subseteq p_{A_1 \to A_2}$ beweisen (vgl. den obigen Beweis, daß $\pi(Fm)$ eine Heytingalgebra ist). $p_{A_1 \vee A_2}$ wäre genau dann das Supremum von p_{A_1} und p_{A_2}, wenn $p_{A_1 \vee A_2} = \bigcap \langle p_A \mid p_{A_1} \cup p_{A_2} \subseteq p_A \rangle$ gälte (und nicht nur $\bigcap \langle p_A \mid p_{A_1} \cup p_{A_2} \subseteq p_A \rangle \subseteq p_{A_1 \vee A_2}$). Wenn man $\{p_A \mid A \in Fm\}$ um neue Mengen endlicher Formelmengen so zu einer Menge Q erweitern könnte, daß für beliebige Teilmengen T von Q der Durchschnitt von T wieder zu Q gehörte, wäre die Existenz (sogar beliebiger) Suprema gesichert. Als neue Mengen kommen solche in Frage, welche gewisse Eigenschaften der p_A verallgemeinern. Ein beliebiges p_A hat nach Definition die folgenden Eigenschaften:

Es gilt $\{\Lambda\} \in p_A$, da $\Lambda \Rightarrow A$ ein Axiom ist.

Wenn $M \in p_A$ gilt und M' eine M umfassende endliche Menge von Formeln ist, dann gilt $M' \in p_A$ aufgrund der Abschwächungsregel.

Aus den Eliminationsregeln folgt weiter:

Wenn $M \Rightarrow A_1$ ohne Schnitt beweisbar ist und $M, A_2 \in p_A$ gilt, dann gilt $M, A_1 \to A_2 \in p_A$.

Wenn $M, A_i \in p_A$ für $i = 1$ oder $i = 2$ gilt, dann gilt $M, A_1 \wedge A_2 \in p_A$

Wenn $M, A_i \in p_A$ für $i = 1$ und $i = 2$ gilt, dann gilt $M, A_1 \vee A_2 \in p_A$.

Die aus den Introduktionsregeln folgenden Eigenschaften lassen sich nicht in bezug auf ein festes p_A formulieren.

Man definiere nun Q als die Menge a l l e r Mengen p von endlichen Formelmengen, welche die folgenden Bedingungen erfüllen:

(Q0) Es gilt $\{\Lambda\} \in p$.

Wenn $M \in p$ gilt und M' eine endliche Menge von Formeln mit $M \subseteq M'$ ist, dann gilt $M' \in p$.

(Q1) Wenn $M, A_2 \in p$ gilt und $M \Rightarrow A_1$ beweisbar ist (ohne Schnitt!), dann gilt $M, A_1 \to A_2 \in p$.

(Q2) Wenn $M, A_i \in p$ gilt für i=1 oder i=2, dann gilt $M, A_1 \wedge A_2 \in p$.

(Q3) Wenn $M, A_i \in p$ gilt für i=1 und i=2, dann gilt $M, A_1 \vee A_2 \in p$.

Q ist per definitionem eine bezüglich $\subseteq$ geordnete und gegen beliebige Durchschnitte abgeschlossene, also vollständige Menge mit $\mathrm{Inf}(T) = \bigcap T$, $\mathrm{Sup}(T) = \bigcap \langle p \in Q \mid \bigcup T \subseteq p \rangle$ (Bezeichnung: $\bigsqcup T$); es existiert das kleinste Element $0 = \bigcap Q$ und das größte Element 1, welches aus allen endlichen Formelmengen besteht.
Ist Q sogar eine Heytingalgebra? Es sei E(1) die Menge aller Enden von 1 (in bezug auf $\subseteq$). E(1) ist eine Heytingalgebra, und für das relative Pseudokomplement $\supset$ gilt $p \supset q = \{M \in 1 \mid$ für alle $M' \supseteq M$ gilt: wenn $M' \in p$, so $M' \in q\}$ für p und q aus E(1). Wegen $Q \subseteq E(1)$ gilt für alle p, q, r aus Q $r \wedge p \subseteq q$ genau dann, wenn $r \subseteq p \supset q$. Man rechnet aber leicht nach, daß mit $p \in Q$ und $q \in Q$ auch $p \supset q \in Q$ gilt.

Mit Q hat man nun eine Heytingalgebra aus dem intuitionistischen Aussagenkalkül ohne Schnitt konstruiert;es lassen sich ohne Schnitt aber auch nur die Inklusionen $p_{A_1} \sqcup p_{A_2} \subseteq p_{A_1 \vee A_2}$ und $p_{A_1} \supset p_{A_2} \subseteq p_{A_1 \to A_2}$ zeigen, d.h. die Abbildung $A \to p_A$ ist kein

Homomorphismus für $\vee$ und $\rightarrow$. Genügt dies zum Beweis der Vollständigkeit?

Wie im Fall der Lindenbaumalgebra hat man die Beziehung (jetzt in bezug auf Beweisbarkeit ohne Schnitt): Es gilt $p_A = 1$ genau dann, wenn A beweisbar ist. Deswegen liegt der folgende Ansatz nahe: Man definiere eine Belegung ι in Q, indem man jeder Aussagenvariablen X p_X zuordnet, und beweise für die durch ι definierte Bewertung v_ι der Formeln eine Behauptung, die $p_A = v_\iota(A)$ für $v_\iota(A) = 1$ impliziert. Dazu würde es genügen, $v_\iota(A) \subseteq p_A$ zu zeigen. Der Induktionsbeweis hierfür scheitert jedoch zunächst im Fall $A = A_1 \rightarrow A_2$ (aus $v_\iota(A_i) \subseteq p_{A_i}$ $(i=1,2)$ kann man i.a. nicht $v_\iota(A_1) \supseteq v_\iota(A_2) \subseteq p_{A_1} \supseteq p_{A_2}$ folgern). Wenn aber außerdem für alle A $\{A\} \in v_\iota(A)$ gälte, wäre der folgende Schluß möglich: Wegen $\{A_1\} \in v_\iota(A_1) \in Q$ gilt $M, A_1 \in v_\iota(A_1)$ für beliebige endliche Formelmengen M; aus $M \in v_\iota(A_1) \supseteq v_\iota(A_2)$ folgt daher $M, A_1 \in v_\iota(A_2)$, wegen $v_\iota(A_2) \subseteq p_{A_2}$ ist $M, A_1 \Rightarrow A_2$ beweisbar, so daß $M \in p_{A_1 \rightarrow A_2}$ gilt. Tatsächlich kann man die beiden erforderlichen Behauptungen simultan beweisen:

Lemma: Für alle Formeln A gilt $\{A\} \in v_\iota(A)$ und $v_\iota(A) \subseteq p_A$.

Beweis: Für Aussagenvariable X folgt die Behauptung aus der Definition von ι; $\wedge$ wird unter jeder Belegung auf 0 abgebildet.

$A = A_1 \wedge A_2$: Aus $\{A_i\} \in v_\iota(A_i)$ (für i=1,2) folgt $\{A_1, A_2\} \in v_\iota(A_i)$ (für i=1,2). Mit (Q2) erhält man $\{A_1 \wedge A_2\} \in v_\iota(A_i)$ (für i=1,2), also auch $\{A_1 \wedge A_2\} \in v_\iota(A_1) \cap v_\iota(A_2)$.- Aus $p_{A_1} \cap p_{A_2} = p_{A_1 \wedge A_2}$ folgt der andere Teil der Behauptung.

$A = A_1 \vee A_2$: Aus $\{A_i\} \in v_\iota(A_i)$ (für i=1,2) folgt $\{A_i\} \in v_\iota(A_1) \cup v_\iota(A_2)$ (für i=1,2), mit (Q3) also $\{A_1 \vee A_2\} \in v_\iota(A_1) \cup v_\iota(A_2)$.- Außerdem

gilt $p_{A_1} \sqcup p_{A_2} \subseteq p_{A_1 \vee A_2}$.

$A = A_1 \to A_2$: Gegeben sei eine endliche Formelmenge $M \in \upsilon_\iota(A_1)$ mit $\{A_1 \to A_2\} \subseteq M$. Aus $\upsilon_\iota(A_1) \subseteq p_{A_1}$ folgt damit die Beweisbarkeit von $M \Rightarrow A_1$. Wegen $\{A_2\} \in \upsilon_\iota(A_2)$ gilt $M, A_2 \in \upsilon_\iota(A_2)$. Mit (Q1) folgt $M, A_1 \to A_2 \in \upsilon_\iota(A_2)$.-Die Argumentation für den zweiten Teil der Behauptung wurde bereits ausgeführt.

§2. Für die intuitionistische Prädikatenlogik erweitere man die Definition der Algebra Q um die beiden folgenden Klauseln:

(Q4) Wenn $M, A(t) \in p$ gilt für einen Term t, dann gilt $M, \forall x A(x) \in p$.

(Q5) Wenn $M, A(y) \in p$ gilt für eine Variable y, die nicht frei in M, $\exists x A(x)$ vorkommt, dann gilt $M, \exists x A(x) \in p$.

Auf der Termalgebra definiert man eine Q-wertige Struktur, indem man jedem n-stelligen Prädikat R die Funktion r zuordnet, welche jedes n-Tupel $\langle t_1, \ldots, t_n \rangle$ auf $p_{Rt_1 \ldots t_n}$ abbildet. Mit ι sei nun die identische Belegung bezeichnet. Dann gilt wieder $\{A\} \in \upsilon_\iota(A)$ und $\upsilon_\iota(A) \subseteq p_A$, wobei jetzt zusätzlich die quantorenlogischen Fälle betrachtet werden müssen:

Wenn man schon $\{A(t)\} \in \upsilon_\iota(A(t))$ für alle Terme t hat, dann fogt mit (Q4) $\{\forall x A(x)\} \in \upsilon_\iota(A(t))$, also $\{\forall x A(x)\} \in \bigcap \langle \upsilon_\iota(A(t)) \mid t \in Tm \rangle$.- Wegen $\upsilon_\iota(\forall x A(x)) \subseteq \upsilon_\iota(A)$ und $\upsilon_\iota(A) \subseteq p_A$ folgt vermittels (∀I) der zweite Teil der Behauptung.

Aus $\{A\} \in \upsilon_\iota(A)$ folgt mit (Q5) $\{\exists x A(x)\} \in \upsilon_\iota(A)$, also erst recht $\{\exists x A(x)\} \in \bigcup \langle \upsilon_\iota(A(t)) \mid t \in Tm \rangle$, damit auch $\{\exists x A(x)\} \in \upsilon_\iota(\exists x A(x))$.- Aufgrund von (∃I) gilt

$\bigcup\langle p_{A(t)} \mid t \in Tm\rangle \subseteq p_{\exists x A(x)}$; damit hat man

$v_l(\exists x A(x)) \subseteq \bigcap\langle p \in Q \mid \bigcup\langle p_{A(t)} \mid t \in Tm\rangle \subseteq p\rangle \subseteq p_{\exists x A(x)}$.

Bemerkung: Man kann für jede Formel A eine Menge möglicher Werte von A durch $QA = \{p \in Q \mid \{A\} \in p \text{ und } p \subseteq p_A\}$ definieren; das soeben bewiesene Lemma besagt dann, daß $v_l(A)$ ein möglicher Wert von A ist. Wenn man von QA ausgeht, läßt sich für beliebige p_i aus Q (i=1,2) und beliebige Familien $\langle p_t \mid t \in Tm\rangle$ von Elementen von Q zeigen: Wenn $p_i \in QA_i$ (i=1,2) gilt, so auch $p_1 \cap p_2 \in QA_1 \wedge A_2$; $p_1 \sqcup p_2 \in QA_1 \vee A_2$ und $p_1 \supset p_2 \in QA_1 \to A_2$; wenn für alle Terme t $p_t \in QA(t)$ gilt, so auch $\bigcap\langle p_t \mid t \in Tm\rangle \in Q\forall x A(x)$ und $\bigsqcup\langle p_t \mid t \in Tm\rangle \in Q\exists x A(x)$. Durch Induktion folgt daraus wiederum $v_l(A) \in QA$. Dieser Weg wird sich für die Typenlogik als der geeignete erweisen.

§3. Für ITE sind die Bedingungen (Q4) und (Q5) auf Typen zu relativieren (x,y und t werden durch x^τ, a^τ und t^τ ersetzt). Außerdem kommt für (KonvE) die folgende Bedingung hinzu:

(Q6) Wenn M, $A(t_1,..,t_n) \in p$ gilt, dann gilt

$$M,\ t_1,..,t_n\ \varepsilon\ \lambda x_1..x_n A(x_1,..,x_n) \in p.$$

Aus der Regel (E) läßt sich wie im Fall der Einführungsregeln keine allgemeine Bedingung für Mengen p von endlichen Formelmengen gewinnen.

Der Versuch liegt nahe, wie in Kapitel I eine Heyting-wertige (Prä-)Struktur aus kanonischen Funktionalen a_t für Terme t aufzubauen, indem man rekursiv $a_t(a_{t_1},..,a_{t_n}) = p_{t_1,..,t_n \varepsilon t}$ definiert. Der Nachweis der Wohldefiniertheit wäre folgendermaßen zu führen:

Angenommen, es gilt $a_{t_i} = a_{s_i}$ für $1 \leq i \leq n$. Dann hat man nach Ind. ann. $p_{c_{i1},..,c_{ir_i}\,\varepsilon\, s_i} = p_{c_{i1},..,c_{ir_i}\,\varepsilon\, t_i}$ für Variable c_{ij}, welche nicht frei in s_i, t_i $(1 \leq i \leq n)$ vorkommen. Daher ist sowohl $c_{i1},\ldots,c_{ir_i} \varepsilon s_i \Rightarrow c_{i1},\ldots,c_{ir_i} \varepsilon t_i$ als auch $c_{i1},\ldots,c_{ir_i} \varepsilon t_i \Rightarrow c_{i1},\ldots,c_{ir_i} \varepsilon s_i$ beweisbar, woraus mit (E) die Beweisbarkeit von $s_1,\ldots,s_n \varepsilon t \Rightarrow t_1,\ldots,t_n \varepsilon t$ und $t_1,\ldots,t_n \varepsilon t \Rightarrow s_1,\ldots,s_n \varepsilon t$ folgt. Mit Schnitt könnte man auf $p_{s_1,..,s_n\,\varepsilon\, t} = p_{t_1,..t_n\,\varepsilon\, t}$ schließen, und man wäre fertig. Ohne Schnitt hat man nur $\{s_1,..,s_n \varepsilon t\} \in p_{t_1,..,t_n\,\varepsilon\, t}$ und $\{t_1,\ldots,t_n \varepsilon t\} \in p_{s_1,..,s_n\,\varepsilon\, t}$. Dies genügt aber zum Nachweis der **Existenz** kanonischer Repräsentanten in einer etwas umfangreicher definierten Prästruktur.

Man definiere eine Q-wertige Prästruktur $\langle A^\tau \rangle_\tau$, zusammen mit einer Relation $<$, wie folgt:

1. $A^\circ = Tm^\circ$; es gilt $t^\circ < a$ genau dann, wenn $t^\circ = a$ gilt.
2. Für $\tau = (\tau_1,..,\tau_n)$, $t \in Tm^\tau$ und $a \in Q^{A^{\tau_1} x \ldots x A^{\tau_n}}$ gilt $t < a$ genau dann, wenn für alle $t_1^{\tau_1},\ldots,t_n^{\tau_n}$ und alle $\langle a_1,\ldots,a_n\rangle$ aus $A^{\tau_1} x \ldots x A^{\tau_n}$ gilt: Aus $t_i < a_i$ für $1 \leq i \leq n$ folgt $a(a_1,\ldots,a_n) \in Qt_1,..,t_n \varepsilon t$ (wobei QA wie in der zuletzt gemachten Bemerkung definiert ist);
   $A^\tau = \{a \in Q^{A^{\tau_1} x \ldots x A^{\tau_n}} \mid$ es existiert ein $t \in Tm^\tau$ mit $t < a\}$.

Die Rangfunktion für Typen ist wie üblich definiert:
$rg(0) = 0$; $rg((\tau_1,\ldots,\tau_n)) = \max(rg(\tau_1),\ldots,rg(\tau_n))+1$.
Es gilt nun das folgende Lemma über die Existenz von kanonischen Repräsentanten:
Es seien $\tau, \sigma_1,\ldots,\sigma_m$ Typen mit $rg(\sigma_i) \leq rg(\tau)$ für $1 \leq i \leq m$,

Dann gilt 1) Für alle freien Variablen und Konstanten u^τ existiert ein $a \in A^\tau$ mit $u < a$.

2) Für alle s_j, $t_j \in Tm^{\sigma_j}$ und alle $a_j \in A^{\sigma_j}$ gilt: Aus $s_j < a_j$ und $t_j < a_j$ für $1 \leq j \leq m$ folgt $\{s_1, \ldots, s_m \varepsilon v\} \in p_{t_1, \ldots, t_m \varepsilon v}$ für jede freie Variable oder Konstante v passenden Typs.

Beweis: Durch Induktion über $rg(\tau)$.

a) $rg(\tau) = rg(\sigma_j) = 0$. Wähle $u = a$ und $s_j = t_j = a_j$ (für $1 \leq j \leq m$).

b) $rg(\tau) > 0$; $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$.

1) Zu gegebenem u definiere a durch:

$a(a_1, \ldots, a_n) = \bigcap \langle p_{t_1, \ldots, t_n \varepsilon u} \mid t_i^{\tau_i} < a_i \ (1 \leq i \leq n) \rangle$.

Für beliebige $s_i^{\tau_i} < a_i$ $(1 \leq i \leq n)$ gilt dann

(i) $a(a_1, \ldots, a_n) \subseteq p_{s_1, \ldots, s_n \varepsilon u}$.

(ii) Wegen $rg(\tau_i) \leq \max(rg(\tau_1), \ldots, rg(\tau_n)) < rg(\tau)$ hat man $\{s_1, \ldots, s_n \varepsilon u\} \in p_{t_1, \ldots, t_n \varepsilon u}$ für alle $t_i^{\tau_i} < a_i$, also $\{s_1, \ldots, s_n \varepsilon u\} \in a(a_1, \ldots, a_n)$.

2) Wenn $\sigma_j = (\sigma_{j1}, \ldots, \sigma_{jr_j})$ ist, existiert wegen $rg(\sigma_{jk}) < \max(rg(\sigma_1), \ldots, rg(\sigma_m)) \leq rg(\tau)$ für jede freie Variable oder Konstante $u_{jk}^{\sigma_{jk}}$ ein $a_{jk} \in A^{\sigma_{jk}}$ mit $u_{jk} < a_{jk}$. Aus $s_j < a$ und $t_j < a_j$ $(1 \leq j \leq m)$ folgt daher $\{u_{j1}, \ldots, u_{jr_j} \varepsilon s_j\} \in p_{u_{j1}, \ldots, u_{jr_j} \varepsilon t}$ und $\{u_{j1}, \ldots, u_{jr_j} \varepsilon t_j\} \in p_{u_{j1}, \ldots, u_{jr_j} \varepsilon s_j}$. Wenn $\sigma_j = 0$ ist, gilt $s_j = t_j = a_j$. Mit (E) folgt also $\{s_1, \ldots, s_m \varepsilon v\} \in p_{t_1, \ldots, t_m \varepsilon v}$ für jede freie Variable oder Konstante v passenden Typs.

Der in obigem Beweis definierte kanonische Repräsentant für u werde mit a_u bezeichnet. Wenn man jeder Konstanten k^τ das Element a_k aus A^τ zuordnet, hat man mit $\langle A^\tau \rangle_\tau$ jedenfalls eine Prästruktur

definiert; um einzusehen, daß $\langle A^\tau \rangle_\tau$ eine Struktur ist, muß man sich zunächst klarmachen, daß die in der Bemerkung am Ende des vorigen Paragraphen angeführte Behauptung auf ITE ausgedehnt werden kann. Es gilt das folgende Lemma:

0. $0 \in Q\Lambda$
1. $QA(t_1,..,t_n) \subseteq Qt_1,..,t_n \in \lambda x_1..x_n A(x_1,..,x_n)$
2. Wenn $p_i \in QA_i$ gilt (für i=1,2), dann gilt $p_1 \cap p_2 \in QA_1 \wedge A_2$, $p_1 \sqcup p_2 \in QA_1 \vee A_2$ und $p_1 \Rightarrow p_2 \in QA_1 \to A_2$.
3. Wenn $\langle p_a \mid a \in A^\tau \rangle$ eine Familie von Elementen von Q ist und für alle $a \in A^\tau$ und alle $t^\tau < a$ $p_a \in QA(t)$ gilt, dann gilt $\bigsqcup \langle p_a \mid a \in A^\tau \rangle \in Q \exists x^\tau A(x^\tau)$ und $\bigcap \langle p_a \mid a \in A^\tau \rangle \in Q \forall x^\tau A(x^\tau)$.

Der Beweis sei für 3. ausgeführt:

Wenn man für alle $t^\tau < a$ $\{A(t)\} \in p_a$ hat, dann auch speziell $\{A(x^\tau)\} \in p_{a_x}$; also gilt $\{A(x^\tau)\} \in \bigsqcup \langle p_a \mid a \in A^\tau \rangle$. Mit (Q5) folgt $\{\exists x^\tau A(x^\tau)\} \in \bigsqcup \langle p_a \mid a \in A^\tau \rangle$. - Wenn $M \in \bigcup \langle p_a \mid a \in A^\tau \rangle$ gilt, dann existiert ein $a \in A^\tau$, sodaß für alle $t^\tau < a$ $M \in p_a \subseteq p_{A(t)}$ gilt; es ist also $M \Rightarrow A(t)$ für irgendein $t^\tau < a$ beweisbar, damit auch $M \Rightarrow \exists x^\tau A(x^\tau)$. Es folgt $\bigcup \langle p_a \mid a \in A^\tau \rangle \subseteq p_{\exists x^\tau A(x^\tau)}$ und damit $\bigsqcup \langle p_a \mid a \in A^\tau \rangle \subseteq p_{\exists x^\tau A(x^\tau)}$.

Wenn man für alle $t^\tau < a$ $\{A(t)\} \in p_a$ hat, dann auch $\{\forall x^\tau A(x^\tau)\} \in p_a$ (für alle $a \in A^\tau$). Damit gilt $\{\forall x^\tau A(x^\tau)\} \in \bigcap \langle p_a \mid a \in A^\tau \rangle$. - Wenn $M \in \bigcap \langle p_a \mid a \in A^\tau \rangle$ gilt, dann gilt $M \in p_a \subseteq p_{A(t)}$ für alle t^τ mit $t^\tau < a$, speziell für x^τ und a_x. Daher ist $M \Rightarrow A(x^\tau)$ beweisbar, woraus mit (∀I) $M \in p_{\forall x^\tau A(x^\tau)}$ folgt.

Es gilt nun das folgende Theorem:

Theorem: Für alle Semi-Formeln A, Semi-Terme t, Terme $t_1,..,t_n$ und alle Belegungen φ in $\langle A^\tau\rangle_\tau$ gilt: Wenn die Menge der in A bzw. t frei vorkommenden Variablen in $\{v_1,..,v_n\}$ enthalten ist und $t_i < \varphi(v_i)$ für $1 \leq i \leq n$ gilt, dann gilt $\upsilon_\varphi(A(v_1,..,v_n)) \in QA(t_1,..,t_n)$ bzw. $t(t_1,..,t_n) < \upsilon_\varphi(t(v_1,..,v_n))$.

Beweis:

1) Für Variablen und Konstanten ist nichts zu zeigen.

2) Für Semi-Terme vom Typ 0 sind Belegungen Termsubstitutionen.

3) $A = s_1,..,s_m \in s_0$:

Nach Ind.ann. gilt $s_j(t_1,..,t_n) < \upsilon_\varphi(s_j(v_1,..,v_n))$. Aufgrund der Definition von $<$ folgt damit $\upsilon_\varphi(s_0)(\upsilon_\varphi(s_1),..,\upsilon_\varphi(s_m)) \in \in Qs_1(t_1,..,t_n),..,s_m(t_1,..,t_n) \in s_0(t_1,..,t_n)$.

4) $A = A_1 \to A_2$:

Aus $\upsilon_\varphi(A_i(v_1,..,v_n)) \in QA_i(t_1,..,t_n)$ $(i=1,2)$ folgt nach obigem Lemma $\upsilon_\varphi(A_1) \supset \upsilon_\varphi(A_2) \in QA_1(t_1,..,t_n) \to A_2(t_1,..,t_n)$.

$A = \exists x^\tau A_1$ $(A_1 = A_1(x^\tau, v_1,..,v_n))$:

Für alle Belegungen $\varphi' \underset{x^\tau}{=} \varphi$ und alle $t^\tau < \varphi'(x^\tau)$ gilt nach Ind. ann. $\upsilon_{\varphi'}(A_1) \in QA_1(t^\tau, t_1,..,t_n)$. Nach obigem Lemma folgt $\bigsqcup\langle \upsilon_{\varphi'}(A_1) \mid \varphi' \underset{x^\tau}{=} \varphi\rangle \in Q \exists x^\tau A_1(x^\tau, t_1,..,t_n)$.

5) $t = \lambda y_1..y_m A$ $(A = A(y_1,..,y_m,v_1,..,v_n))$:

Es soll $\upsilon_\varphi(t)(a_1,..,a_m) = \upsilon_{\varphi'}(A)$ gelten für

$$\varphi'(v) = \begin{cases} a_j & \text{für } v = y_j \quad (1 \leq j \leq m) \\ \varphi(v) & \text{sonst} \end{cases}$$

Man hat also für $t(t_1,..,t_n)$ und irgendwelche $s_j < a_j$ $(1 \leq j \leq m)$ $\upsilon_{\varphi'}(A) \in Qs_1,..,s_m \in t(t_1,..,t_n)$ zu zeigen. Für $t(t_1,..,t_n) = = \lambda y_1..y_m A(y_1,..,y_m,t_1,..,t_n)$ gilt nach obigem Lemma

$QA(s_1,..,s_m,t_1,..,t_n) \subseteq Qs_1,..,s_m \in \lambda y_1..y_m A(y_1,..,y_m,t_1,..,t_n)$.
Nach Ind.ann. hat man $\upsilon_\varphi(A) \in QA(s_1,...,s_m, t_1,...,t_n)$.

Es sei nun ι eine Belegung mit $\iota(v) = a_v$ für alle freien Variablen v. Dann ist $\upsilon_\iota(A) \in QA$ für alle Formeln A. Aus $\upsilon_\iota(A) = 1$ folgt daher $p_A = 1$, A ist beweisbar.

B. Klassische Logik

§1. Die Überlegungen, die im intuitionistischen Fall auf die Definition von $\leq_2$ geführt haben, geben für die klassische Logik Anlaß zu der entsprechenden Definition: Es gelte $A \leq B$ genau dann, wenn für alle M und N $\dfrac{M \Rightarrow N,A}{M \Rightarrow N,A}$ gilt.

Bemerkung: In bezug auf $\leq_2$ und $\sim$ war eine Schwierigkeit die, daß man nicht ohne Schnitt zeigen konnte, daß $\sim$ Kongruenzrelation für $\rightarrow$ ist. Für die oben definierte Quasiordnung $\leq$ und die zugehörige Äquivalenzrelation $\equiv$ gilt tatsächlich: $\equiv$ ist genau dann kongruent bezüglich $\neg$, wenn die Schnittregel zulässig ist. (Ein Beweis findet sich in [14], pp.82,83.)

Entsprechend setzt man jetzt $p_A = \{\langle M,N\rangle \mid M \Rightarrow N,A$ ist ohne Schnitt beweisbar$\}$. Die Menge $\{p_A \mid A \in Fm$ bildet nun einen

Verband bezüglich $\subseteq$ mit $p_{A_1} \cap p_{A_2} = p_{A_1 \wedge A_2}$ und $p_{A_1} \cup p_{A_2} = p_{A_1 \vee A_2}$. Für das letztere benötigt man die Gültigkeit von $\dfrac{M \Rightarrow N, A \vee B}{M \Rightarrow N, A, B}$ (was z.B. in [14] bewiesen wird). Es läßt sich aber nicht ohne Schnitt zeigen, daß $p_A \cap p_{\neg A}$ kleinstes Element ist, so daß man nicht $-p_A = p_{\neg A}$ hat.

Ist es möglich, wie in A.§1. eine Heytingalgebra Q zu definieren und daraus eine Boolesche Algebra zu gewinnen, welche $\{p_A \mid A \in Fm\}$ umfaßt? Dazu ist zunächst festzuhalten, daß sich jetzt auch die aus den Einführungsregeln folgenden Eigenschaften in bezug auf ein festes p_A - und damit für beliebige Mengen endlicher Formelmengen - formulieren lassen (z.B.: wenn $\langle M, N, A_i \rangle \in p_A$ für i=1 oder i=2 gilt, dann gilt $\langle M, N, A_1 \vee A_2 \rangle \in p_A$). Ersetzt man das Paar $\langle \{A_1, \ldots, A_n\}, \{B_1, \ldots, B_m\} \rangle$ per Signierung der Formeln mit "T" und "F" durch die Menge $\{TA_1, \ldots, TA_n, FB_1, \ldots, FB_m\}$, dann ergibt sich, daß wir es mit "Inkonsistenzeigenschaften" zu tun haben:

Eine Menge $\mathcal{P}$ von endlichen Mengen signierter Formeln heiße Inkonsistenzeigenschaft - kurz: IP - für die klassische Aussagenlogik, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(IP0) Für alle A gilt $\{TA, FA\} \in \mathcal{P}$.
(Falls Λ zur Sprache gehört: $\{T\Lambda\} \in \mathcal{P}$)
Wenn $S \in \mathcal{P}$ gilt und S' eine S umfassende endliche Menge signierter Formeln ist, dann gilt $S' \in \mathcal{P}$.

(IP1) Wenn $S, TA \in \mathcal{P}$ gilt, dann gilt $S, F\neg A \in \mathcal{P}$.
Wenn $S, FA \in \mathcal{P}$ gilt, dann gilt $S, T\neg A \in \mathcal{P}$.

(IP2) Wenn $S, TA_i \in \mathcal{P}$ für i=1 oder i=2 gilt, dann gilt $S, TA_1 \wedge A_2 \in \mathcal{P}$
Wenn $S, FA_i \in \mathcal{P}$ für i=1 und i=2 gilt, dann gilt $S, FA_1 \wedge A_2 \in \mathcal{P}$

(IP3) Wenn $S, TA_i \in \mathcal{P}$ für i=1 und i=2 gilt, dann gilt $S, TA_1 \vee A_2 \in \mathcal{P}$
Wenn $S, FA_i \in \mathcal{P}$ für i=1 oder i=2 gilt, dann gilt $S, FA_1 \vee A_2 \in \mathcal{P}$

Zur Terminologie: Der Begriff "Tableau" wird hier und im folgenden immer im Sinne von "Blocktableau" gebraucht (vergleiche dazu [9] p.101ff.). Auf diesen beziehen sich auch die damit zusammenhängenden Begriffe wie "geschlossen", "offen" usw. Eine endliche Menge S signierter Formeln heißt inkonsistent, wenn ein geschlossenes Tableau für S existiert.

Man definiere nun O als die Menge aller inkonsistenten Mengen signierter Formeln. Es gilt

1. O ist eine Inkonsistenzeigenschaft. (Denn die Bedingungen (IP1) bis (IP3) entsprechen genau den Tableauregeln.)
2. $O \subseteq \mathcal{P}$ für jede weitere Inkonsistenzeigenschaft $\mathcal{P}$. (Den Beweis führt man durch Induktion über die Länge der geschlossenen Tableaux der S aus O.)

Es sei jetzt Q die Menge aller Inkonsistenzeigenschaften. Q ist bezüglich $\subseteq$ eine Heytingalgebra mit O als kleinstem Element, der Menge aller endlichen Mengen signierter Formeln als größtem Element 1, mit $\sqcap M = \bigcap M$, $\sqcup M = \bigcap \langle p \in Q \mid \bigcup M \subseteq p \rangle$ (für beliebige $M \subseteq Q$) und $p \supset q = \{S \in 1 \mid$ für alle $S' \supseteq S$ gilt: wenn $S' \in p$, so $S' \in q\}$.

Für das Komplement $-p = p \supset O$ ergibt sich daher

$-p = \{S \in 1 \mid$ für alle $S' \supseteq S$ gilt $S' \in O$ oder $S' \notin p\}$ und

$--p = \{S \in 1 \mid$ für alle $S' \supseteq S$ gilt: $S' \in O$ oder es existiert ein $S'' \supseteq S'$ mit $S'' \in p \setminus O\}$.

In Analogie zum intuitionistischen Fall definiert man weiter

$QA = \{p \in Q \mid \{TA\} \in p$ und für alle $S \in p$ gilt $S,FA \in O\}$,

$p_A = \{S \in 1 \mid S,FA \in O\}$.

p_A ist wieder das größte Element von QA.

QA ist gegen die Bildung der doppelten Negation abgeschlossen:
Wenn $p \in QA$ gilt, dann gilt $--p \in QA$ (für alle A).

Beweis: Es gilt $\{TA\} \in p \subseteq --p$.

Gegeben sei ein $S \in --p$. Für $S' = S,FA$ gilt entweder $S' \in O$ - dann ist man fertig; oder es existiert ein $S'' \supseteq S'$ mit $S'' \in p \setminus O$, - dann folgt wegen $p \in QA$ $S'',FA = S'' \in O$. Also gilt $S,FA \in O$.

Als unmittelbare Konsequenz erhält man, daß für alle A $p_A = --p_A$ gilt.

Wie früher hat man das

Lemma: Wenn $p \in QA$ gilt, dann gilt $-p \in Q\neg A$.

Wenn $p_i \in QA_i$ (für i=1,2) gilt, dann gilt $p_1 \cap p_2 \in QA_1 \wedge A_2$ und $p_1 \sqcup p_2 \in QA_1 \vee A_2$.

Beweis: Gegeben sei ein $p \in QA$.

a) Es sei $S' \supseteq \{T\neg A\}$. Falls $S' \notin p$ gilt, ist man fertig. Sonst hat man $S',FA \in O$ und damit $S',T\neg A \in O$.

b) Gegeben sei ein S mit: für alle $S' \supseteq S$ gilt $S' \in O$ oder $S' \notin p$. Aus $\{TA\} \in p$ folgt $\{F\neg A\} \in p$, also auch $S,F\neg A \in p$, woraus $S,F\neg A \in O$ folgt.

Gegeben seien $p_i \in QA_i$ (i=1,2).

a) Es gilt $\{TA_i\} \in p$ für i=1,2 und jedes $p \supseteq p_1 \cup p_2$, also auch $\{TA_1 \vee A_2\} \in p$ für jedes $p \supseteq p_1 \cup p_2$.

b) Wenn $S \in p_1 \cup p_2$ gilt, dann existiert ein i mit $S,FA_i \in O$, also gilt $S,FA_1 \vee A_2 \in O$, d.h. $S \in p_{A_1 \vee A_2}$.

Aus $p_1 \cup p_2 \subseteq p_{A_1 \vee A_2}$ folgt $p_1 \sqcup p_2 \subseteq p_{A_1 \vee A_2}$.

Es sei nun $\mathfrak{B}$ die Algebra der regulären Elemente von Q. Man definiere die Belegung ι der Aussagenvariablen in $\mathfrak{B}$ durch $\iota(X) = p_X$.

Durch Induktion über den Formelaufbau sieht man wieder, daß für die Fortsetzung v_ι von Fm in $\mathfrak{B}$ $v_\iota(A) \in QA$ gilt. (z.B.: Wenn $v_\iota(A_i) \in QA_i$ (i=1,2) gilt, dann gilt $v_\iota(A_1) \sqcup v_\iota(A_2) \in QA_1 \vee A_2$, also auch $--(v_\iota(A_1) \sqcup v_\iota(A_2)) = v_\iota(A_1 \vee A_2) \in QA_1 \vee A_2$.)
Aus $v_\iota(A) = 1$ folgt damit $p_A = 1$, also $\{FA\} \in O$; d.h. A ist (ohne Schnitt) beweisbar.

§2. Für die klassische Prädikatenlogik erweitere man die Definition der Inkonsistenzeigenschaft um die beiden folgenden Klauseln:

(IP4) Wenn $S,TA(t) \in \mathcal{P}$ gilt für einen Term t, dann gilt $S,T\forall xA(x) \in \mathcal{P}$.
Wenn $S,FA(y) \in \mathcal{P}$ gilt für eine Variable y, welche nicht frei in $S,F\forall xA(x)$ vorkommt, dann gilt $S,F\forall xA(x) \in \mathcal{P}$.

(IP5) Wenn $S,TA(y) \in \mathcal{P}$ gilt für eine Variable y, welche nicht frei in $S,T\exists xA(x)$ vorkommt, dann gilt $S,T\exists xA(x) \in \mathcal{P}$.
Wenn $S,FA(t) \in \mathcal{P}$ gilt für einen Term t, dann gilt $S, F\exists xA(x) \in \mathcal{P}$.

Q und $\mathfrak{B}$ werden wie in §1 definiert. Das Lemma wird um die Aussagen für $\forall$ und $\exists$ erweitert:
Wenn $\langle p_t \mid t \in Tm\rangle$ eine Familie von Elementen von Q ist und für alle Terme t $p_t \in QA(t)$ gilt, dann gilt
$\bigcap\langle p_t \mid t \in Tm\rangle \in Q\forall xA(x)$ und $\bigsqcup\langle p_t \mid t \in Tm\rangle \in Q\exists xA(x)$.
Auf der Termalgebra definiert man eine Struktur vermittels $r(t_1,..,t_n) = p_{Rt_1..t_n}$. Für die durch die identische Bele-

gung definierte Bewertung v_l von Fm in $\mathcal{B}$ gilt wieder $v_l(A) \in QA$, woraus wie oben die Vollständigkeit folgt.

§3. Für KTE werden die Bedingungen (IP4) und (IP5) auf Typen relativiert (x, y und t werden durch x^τ, a^τ und t^τ ersetzt), und es kommt die folgende Bedingung hinzu:

(IP6) Wenn $S,TA(t_1,..,t_n) \in \mathcal{P}$ gilt, dann gilt

$$S,Tt_1,..,t_n \in \lambda x_1..x_n A(x_1,..,x_n) \in \mathcal{P}.$$

Wenn $S,FA(t_1,..,t_n) \in \mathcal{P}$ gilt, dann gilt

$$S,Ft_1,..,t_n \in \lambda x_1..x_n A(x_1,..,x_n) \in \mathcal{P}.$$

Q und $\mathcal{B}$ werden wie in §1 definiert. Das kleinste Element von Q ist jetzt also die Menge aller bezüglich KT inkonsistenten Mengen signierter Formeln. (Zur Formulierung der Tableauregeln vergleiche den Anfang des vierten Kapitels.) Weiter definiert man eine $\mathcal{B}$-wertige Prästruktur $\langle A^\tau \rangle_\tau$ zusammen mit einer Relation $<$ wie folgt:

1. $A^o = Tm^o$, es gilt $t^o < a$ genau dann, wenn $t^o = a$ gilt.
2. Für $\tau = (\tau_1,..,\tau_n)$, $t \in Tm^\tau$ und $a \in \mathcal{B}^{A^{\tau_1} x ... x A^{\tau_n}}$ gilt $t < a$ genau dann, wenn für alle $t_1^{\tau_1},..,t_n^{\tau_n}$ und alle $\langle a_1,..,a_n \rangle \in A^{\tau_1} x ... x A^{\tau_n}$ gilt: Aus $t_i < a_i$ für $1 \leq i \leq n$ folgt $a(a_1,..,a_n) \in Qt_1,..,t_n \in t \cap \mathcal{B}$;

$$A^\tau = \{a \in \mathcal{B}^{A^{\tau_1} x ... x A^{\tau_n}} \mid \text{es existiert ein } t \in Tm^\tau \text{ mit } t < a\}.$$

Das Lemma über die Existenz kanonischer Repräsentanten gilt nach wie vor, weil das Infimum einer Familie von Elementen von $\mathcal{B}$ wieder zu $\mathcal{B}$ gehört (siehe [7] p. 137). Damit folgt die Vollständigkeit von KTE ohne Schnitt für die Klasse der Booleschwertigen Strukturen wie im intuitionistischen Fall.

III. "MODEL-EXISTENCE-THEOREM" UND "GENERIC-MODEL-THEOREM"

§1. Es sei eine abzählbare prädikatenlogische Sprache mit Funktionszeichen gegeben; der Substitutionsbegriff sei der am Ende des ersten Kapitels eingeführte. Die Komponenten signierter Formeln sind wie folgt definiert (vgl. [9]):

α	α_1	α_2
$TA_1 \wedge A_2$	TA_1	TA_2
$FA_1 \vee A_2$	FA_1	FA_2
$FA_1 \rightarrow A_2$	TA_1	FA_2
$T \neg A$	FA	FA
$F \neg A$	TA	TA

β	β_1	β_2
$TA_1 \vee A_2$	TA_1	TA_2
$FA_1 \wedge A_2$	FA_1	FA_2
$TA_1 \rightarrow A_2$	FA_1	TA_2

γ	$\gamma(t)$
$T \forall x A(x)$	$TA(t)$
$F \exists x A(x)$	$FA(t)$

δ	$\delta(y)$
$T \exists x A(x)$	$TA(y)$
$F \forall x A(x)$	$FA(y)$

Damit lassen sich die Tableauregeln für die klassische Prädikatenlogik kurz so darstellen (S bezeichne wie im vorigen Kapitel eine endliche Menge signierter Formeln, "S,A" stehe wie bisher für "$S \cup \{A\}$"):

$$\frac{S, \alpha}{S, \alpha_i} \quad \text{für } i=1,2 \qquad\qquad \frac{S, \beta}{S, \beta_1 \mid S, \beta_2}$$

$$\frac{S, \gamma}{S, \gamma(t)} \qquad \frac{S, \delta}{S, \delta(y)} \quad \text{falls y nicht frei in S,}\delta \text{ vorkommt.}$$

Eine Menge $\mathcal{S}$ von (nicht notwendig endlichen) Mengen signierter Formeln heißt Konsistenzeigenschaft - kurz: CP -, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(CP0) Für alle $S \in \mathcal{S}$ und alle Formeln A gilt: Es ist nicht zugleich $TA \in S$ und $FA \in S$.

Aus $S \in \mathcal{S}$ und $T \subseteq S$ folgt $T \in \mathcal{S}$.

(CP1) Wenn $S, \alpha \in \mathcal{S}$ gilt, dann gilt $S, \alpha_i \in \mathcal{S}$ für i=1 und i=2.

(CP2) Wenn $S, \beta \in \mathcal{S}$ gilt, dann gilt $S, \beta_i \in \mathcal{S}$ für i=1 oder i=2.

(CP3) Wenn $S, \gamma \in \mathcal{S}$ gilt, dann gilt $S, \gamma(t) \in \mathcal{S}$ für alle Terme t.

(CP4) Wenn $S, \delta \in \mathcal{S}$ gilt, dann gilt $S, \delta(y) \in \mathcal{S}$ für y nicht frei in S, δ.

Es sei $\mathcal{C}$ die Menge aller konsistenten Mengen signierter Formeln (d.h. es gilt $S \in \mathcal{C}$ genau dann, wenn für jede endliche Teilmenge von S jedes Tableau offen ist). Dann gilt

1. $\mathcal{C}$ ist eine Konsistenzeigenschaft. (Denn die "CP-Regeln" (CP1) bis (CP4) sind genau den Tableauregeln nachgebildet.)
2. Es ist $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{C}$ für jede weitere Konsistenzeigenschaft $\mathcal{S}$. (Falls nämlich ein $S \in \mathcal{S}$ inkonsistent wäre, gäbe es ein geschlossenes Tableau für ein endliches $S' \subseteq S$; durch Induktion über die Länge des geschlossenen Tableaus sieht man, daß das ein Widerspruch zu (CP0) wäre.)

Das Model-Existence-Theorem - kurz: MET - besagt nun folgendes:
Gegeben sei eine CP $\mathcal{S}$ und ein $S_0 \in \mathcal{S}$ so, daß unendlich viele Variable existieren, die nicht frei in S_0 vorkommen.
Dann ist S_0 erfüllbar.

Beweis:

Zu einer Abzählung $\langle A_n \rangle$ aller signierten Formeln definiere man eine Folge $\langle S_n \rangle$ von Elementen von $\mathcal{S}$ folgendermaßen:
S_0 ist vorgegeben.

Für $n > 0$ unterscheide man, ob (a) $S_n, A_n \notin \mathcal{S}$ oder (b) $S_n, A_n \in \mathcal{S}$ gilt. Im Fall (a) setze man $S_{n+1} = S_n$. Im Fall (b) definiere man

$$S_{n+1} = \begin{cases} S_n, A_n & \text{falls } A_n \text{ } \alpha\text{- oder } \gamma\text{-Formel oder atomar ist} \\ S_n, \beta, \beta_i & \text{falls } A_n \text{ } \beta\text{-Formel ist (wobei i minimal für} \\ & S_n, \beta, \beta_i \in \mathcal{S} \text{ sein soll)} \\ S_n, \delta, \delta(y) & \text{falls } A_n \text{ } \delta\text{-Formel ist (wobei y die erste} \\ & \text{Variable sein soll, so daß } S_n, \delta, \delta(y) \in \mathcal{S} \\ & \text{gilt)} \end{cases}$$

Es sei $\mathfrak{A} = \bigcup \langle S_n \mid n \in \omega \rangle$. Über der Termalgebra der Sprache definiert man eine Struktur $\mathcal{A}$, indem man jedem n-stelligen Prädikat R die Relation $\bar{R} = \{\langle t_1, .., t_n \rangle \mid TRt_1..t_n \in \mathfrak{A}\}$ zuordnet. Die Bewertungsfunktion v_φ sei für signierte Formeln durch $v_\varphi(TA) = v_\varphi(A)$ und $v_\varphi(FA) = 1 - v_\varphi(A)$ definiert. Mit id sei die identische Belelegung bezeichnet.

Behauptung: id erfüllt $\mathfrak{A}$ in $\mathcal{A}$.

Beweis: Durch Induktion über den Formelaufbau.

Wenn $TRt_1..t_n \in \mathfrak{A}$ gilt, dann gilt $v_{id}(TRt_1..t_n) = 1$ per definitionem. Wenn $FRt_1..t_n \in \mathfrak{A}$ gilt, dann gilt $TRt_1..t_n \notin \mathfrak{A}$, also $v_{id}(Rt_1..t_n) = 0$.

Es genügt nun zu zeigen, daß $\mathfrak{A}$ eine Hintikka-Menge ist, d.h. daß folgendes gilt:

Aus $\alpha \in \mathfrak{A}$ folgt $\alpha_i \in \mathfrak{A}$ für i=1,2.

Aus $\beta \in \mathfrak{A}$ folgt $\beta_i \in \mathfrak{A}$ für i=1 oder i=2.

Aus $\gamma \in \mathfrak{A}$ folgt $\gamma(t) \in \mathfrak{A}$ für alle Terme t.

Aus $\delta \in \mathfrak{A}$ folgt $\delta(y) \in \mathfrak{A}$ für eine Variable y.

Wegen $S_0 \subseteq S_1 \subseteq \ldots$ und der CP-Bedingung (CPO) gilt für jede sig-

nierte Formel A: Wenn $A \in \gamma$ gilt, so auch $S_n, A \in \mathcal{S}$ für jedes n.-
Gegeben sei nun ein $\alpha \in \gamma$; für ein n ist $\alpha = A_n$. Zu einer gegebenen Komponente α_i von α gibt es ein n_i mit $\alpha_i = A_{n_i}$. Aus $S_{n_i}, A_n \in \mathcal{S}$ folgt $S_{n_i}, A_n, A_{n_i} \in \mathcal{S}$, also auch $S_{n_i}, A_{n_i} \in \mathcal{S}$; nach Definition von γ folgt daraus $A_{n_i} \in S_{n_i+1}$.
Gegeben sei ein $\beta \in \gamma$, $\beta = A_n$. Wegen $S_n, A_n \in \mathcal{S}$ gilt damit $S_n, \beta, \beta_i = S_{n+1}$ (für ein i).
Für ein gegebenes $\delta \in \gamma$ mit $\delta = A_n$ folgt aus $S_n, A_n \in \mathcal{S}$ ebenso $S_n, \delta, \delta(y) = S_{n+1}$ (für ein y).
Gegeben sei ein $\gamma \in \gamma$, $\gamma = A_n$. Zu einem gegebenen Term t sei n(t) der Index von $\gamma(t)$ in der Abzählung $\langle A_n \rangle_n$. Aus $S_{n(t)}, A_n \in \mathcal{S}$ folgt $S_{n(t)}, A_n, \gamma(t) \in \mathcal{S}$, also $S_{n(t)}, \gamma(t) \in \mathcal{S}$ und damit $\gamma(t) \in S_{n(t)+1}$.

§2. Von jetzt ab enthalte die zugrundeliegende Sprache den Allquantor nicht als undefiniertes Grundzeichen. Die Menge der Prädikate der Sprache werde mit Pr bezeichnet.
Unter einer "Forcing-Struktur" verstehe ich eine Kripke-Struktur über konstantem Individuenbereich, d.h.:
$\langle H, \leq, \Phi, U \rangle$ ist eine Forcing-Struktur - kurz: FS - für die gegebene Sprache, wenn folgendes gilt:
(i) U ist eine Algebra vom Typ der Termalgebra der Sprache.
(ii) $\langle H, \leq \rangle$ ist eine Quasiordnung.
(iii) Φ ist eine Funktion von $Pr \times H$ in die Potenzmenge von $\bigcup \langle U^n \mid n \in \omega \rangle$, für die gilt: 1. $\Phi(R,h) \subseteq U^n$ (wobei n die Stellenzahl von R ist); 2. $h \leq h'$ impliziert $\Phi(R,h) \subseteq \Phi(R,h')$ (für alle $R \in Pr$, $h \in H$, $h' \in H$).

Zu jeder Belegung φ der Variablen in U sei die homomorphe Fortsetzung auf die Termalgebra mit h_φ bezeichnet. Für alle Belegungen φ und alle $h \in H$ definiert man eine Bewertungsfunktion w_φ^h von Fm nach 2 rekursiv wie folgt:

$w_\varphi^h(Rt_1..t_n) = 1$ genau dann wenn $\langle h_\varphi(t_1),..,h_\varphi(t_n)\rangle \in \Phi(R,h)$;

$w_\varphi^h(A_1 \wedge A_2) = 1$ genau dann wenn $w_\varphi^h(A_1) = 1$ und $w_\varphi^h(A_2) = 1$;

$w_\varphi^h(A_1 \vee A_2) = 1$ genau dann wenn $w_\varphi^h(A_1) = 1$ oder $w_\varphi^h(A_2) = 1$;

$w_\varphi^h(\neg A) = 1$ genau dann wenn für alle $h' \geq h$ $w_\varphi^{h'}(A) = 0$;

$w_\varphi^h(A_1 \rightarrow A_2) = 1$ genau dann wenn für alle $h' \geq h$: aus $w_\varphi^{h'}(A_1) = 1$ folgt $w_\varphi^{h'}(A_2) = 1$;

$w_\varphi^h(\exists x A) = 1$ genau dann wenn ein $\varphi' \underset{x}{=} \varphi$ existiert mit $w_{\varphi'}^h(A) = 1$.

Für "$w_\varphi^h(A) = 1$" kann man sagen "φ erfüllt A an der Stelle h"; falls A eine Aussage ist (und somit jedes φ denselben Wert liefert), "h erzwingt A".

Für signierte Formeln definiert man $w_\varphi^h(TA) = w_\varphi^h(A)$ und $w_\varphi^h(FA) = 1 - w_\varphi^h(A)$. Wie man leicht sieht, gilt $w_\varphi^h(TA) = 1$ genau dann, wenn für alle $h' \geq h$ $w_\varphi^{h'}(TA) = 1$ gilt; $w_\varphi^h(FA) = 1$ genau dann, wenn für alle $h' \leq h$ $w_\varphi^{h'}(FA) = 1$ gilt. (Die aus der Definition der Bewertungsfunktion sich ergebenden Darstellungen für α -, β -, γ - und δ -Formeln werden im folgenden nicht verwendet, da sie keine nennenswerten Vereinfachungen mit sich bringen; man vergleiche hierzu [10].)

Es sei $\langle H, \leq, \Phi, U\rangle$ eine FS mit abzählbarem U. Eine Teilmenge G von H heißt <u>generisch</u>, wenn gilt:

(i) Für alle $g_1, g_2 \in G$ existiert ein $g_3 \in G$ mit: $g_1 \leq g_3$ und $g_2 \leq g_3$.

(ii) Für alle Belegungen φ und alle Formeln A existiert ein $g \in G$ mit: $w_\varphi^g(A) = 1$ oder $w_\varphi^g(\neg A) = 1$.

Es gilt das folgende

Lemma 1: Zu jedem $g_o \in H$ existiert ein generisches $G \subseteq H$ mit $g_o \in G$

Beweis: Zu jeder Formel A gibt es nur abzählbar viele Belegungen φ, die auf den freien Variablen von A variieren und sonst konstant sind. Also gibt es eine Abzählung $\langle P_n \rangle$ von Paaren $\langle A,\varphi \rangle$ derart, daß für jedes A und jede Belegung ψ ein n existiert so, daß $P_n = \langle A,\varphi \rangle$ gilt und φ mit ψ auf den freien Variablen von A übereinstimmt (also auch $w^h_\varphi(A) = w^h_\psi(A)$ für alle $h \in H$ gilt).

Man definiere rekursiv eine Folge $\langle g_n \rangle$ von Elementen von H mit Anfang g_o:

Für $n > 0$ und $P_n = \langle A,\varphi \rangle$ unterscheide man, ob

(a) für alle $h \geq g_n$ $w^h_\varphi(A) = 0$ gilt oder

(b) ein $h \geq g_n$ existiert mit $w^h_\varphi(A) = 1$.

Im Fall (a) setze man $g_{n+1} = g_n$; im Fall (b) sei g_{n+1} ein $h \geq g_n$ mit $w^h_\varphi(A) = 1$ (man beachte, daß hier i.a. das Auswahlaxiom eingeht!). Dann definiert man $G = \mathrm{im}(\langle g_n \rangle)$.

Weiter hat man das folgende

Lemma 2: Sei $\langle H, \leq, \Phi, U \rangle$ eine beliebige FS und $G \subseteq H$ generisch. Dann existiert eine (klassische) Struktur $\mathcal{A}$ über U mit der Eigenschaft: Für alle Belegungen φ in U und alle Formeln A gilt: Es existiert genau dann ein $g \in G$ mit $w^g_\varphi(A) = 1$, wenn $v_\varphi(A) = 1$ gilt (wobei v_φ die Bewertungsfunktion für $\mathcal{A}$ ist).

Man nennt jede Struktur mit dieser Eigenschaft eine "von G erzeugte Struktur".

Beweis: Für jedes Prädikat R definiere man die Relation $\bar{R}$ durch

$\bar{R} = \bigcup \langle \Phi(R,g) \mid g \in G \rangle$. Für Atomformeln $Rt_1..t_n$ folgt dann die Behauptung sofort.

$A = A_1 \vee A_2$: Es existiert genau dann ein $g \in G$ mit $w_\varphi^g(A) = 1$, wenn ein $g \in G$ mit $w_\varphi^g(A_1) = 1$ oder ein $g \in G$ mit $w_\varphi^g(A_2)=1$ existiert, also genau dann, wenn $v_\varphi(A_1) = 1$ oder $v_\varphi(A_2)=1$ gilt.

$A = A_1 \wedge A_2$: Wegen Bedingung (i) in der Definition der generischen Menge gilt: Es existiert genau dann ein $g \in G$ mit $w_\varphi^g(A) = 1$, wenn ein $g_1 \in G$ mit $w_\varphi^{g_1}(A_1) = 1$ und ein $g_2 \in G$ mit $w_\varphi^{g_2}(A_2) = 1$ existiert.

$A = \neg A_1$: Es existiert genau dann ein $g_1 \in G$ mit $w_\varphi^{g_1}(\neg A_1) = 1$, wenn für alle $g \in G$ $w_\varphi^g(A_1) = 0$ gilt; denn man hat 1. Falls ein $g_1 \in G$ mit $w_\varphi^{g_1}(\neg A_1) = 1$ und ein $g_2 \in G$ mit $w_\varphi^{g_2}(A_1) = 1$ existiert, ergibt sich ein Widerspruch zu Bedingung (i) der Generizität. 2. Falls kein $g \in G$ mit $w_\varphi^g(A_1) = 1$ existiert, gibt es wegen Bedingung (ii) ein $g_1 \in G$ mit $w_\varphi^{g_1}(\neg A_1) = 1$.

$A = A_1 \rightarrow A_2$: 1. Wenn ein $g_0 \in G$ existiert mit $w_\varphi^{g_0}(A) = 1$ und wenn $v_\varphi(A_1) = 1$ gilt, dann gibt es ein $g_1 \in G$ mit $w_\varphi^{g_1}(A_1) = 1$ und ein $g_2 \geq g_0, g_1$ mit $w_\varphi^{g_2}(A_2) = 1$, so daß $v_\varphi(A_2) = 1$ gilt. 2. Wenn für alle $g \in G$ ein $h \geq g$ existiert mit $w_\varphi^h(A_1) = 1$ und $w_\varphi^h(A_2) = 0$, dann gilt (a) für alle $g \in G$ $w_\varphi^g(A_2) = 0$, also $v_\varphi(A_2) = 0$; (b) wegen Bedingung (ii) der Generizität gibt es ein $g_0 \in G$ mit $w_\varphi^{g_0}(A_1) = 1$, woraus $v_\varphi(A_1)=1$ folgt.

$A = \exists x A_1$: "es existiert ein $g \in G$ und ein $\varphi' \underset{x}{=} \varphi$ mit $w_{\varphi'}^g(A_1) = 1$" ist gleichwertig mit "es existiert ein $\varphi' \underset{x}{=} \varphi$ und ein $g \in G$ mit $w_{\varphi'}^g(A_1) = 1$!"- Man beachte, daß für den Allquantor so

nicht argumentiert werden kann; der Induktionsbeweis geht für eine Sprache mit $\exists$ und $\forall$ als undefinierten Grundzeichen nicht durch.

Bemerkung: Für Sprachen ohne Funktionszeichen (und ohne Allquantor) kann man das obige leicht auf Kripke-Strukturen $\langle H, \leq, \Phi, \Psi \rangle$ mit echt wachsendem Ψ verallgemeinern, indem man als Individuenbereich der Struktur $U_G = \bigcup \langle \Psi(g) \mid g \in G \rangle$ wählt und $\bar{R}$ wie vorher definiert.

Für eine FS $\langle H, \leq, \Phi, U \rangle$ und ein $h \in H$ heißt eine Struktur $\mathcal{A}$ "generische Struktur für h", wenn $\mathcal{A}$ von einem generischen $G \subseteq H$ erzeugt ist mit $h \in G$. Aus den beiden Lemmata folgt nun das Generic-Model-Theorem (kurz: GMT):

Für jede FS $\langle H, \leq, \Phi, U \rangle$ mit abzählbarem Individuenbereich U und jedes $h \in H$ existiert eine generische Struktur für h.

§3. Die Analogien in den Beweisen des MET und des GMT sind offensichtlich: In jenem wird die Folge $\langle S_n \rangle$ durch die Fallunterscheidung "$S_n, A_n \in \mathcal{S}$ oder $S_n, A_n \notin \mathcal{S}$", in diesem durch die Fallunterscheidung "es existiert ein $h \geq g_n$ mit $w^h_\varphi(A) = 1$ oder nicht" definiert; in jenem setzt man $\bar{R} = \{\langle t_1, .., t_m \rangle \mid$ es gibt ein $n \in \omega$ mit $TRt_1 .. t_m \in S_n\}$, in diesem $\bar{R} = \{\langle t_1, .., t_m \rangle \mid$ es gibt ein $g \in G$ mit $\langle t_1, .., t_m \rangle \in \Phi(R, g)\}$. Kann man "$S, A \in \mathcal{S}$" mit "$w^h_\varphi(A) = 1$" bzw. "$TRt_1, .t_m \in S$" mit "$\langle t_1, .., t_m \rangle \in \Phi(R, g)$" so in Beziehung setzen, daß die Analogie zu einer präzisen Aussage wird?

Es gilt der folgende

Satz: Gegeben sei eine CP $\mathcal{S}$. Man definiere eine FS $\langle \mathcal{S}, \subseteq, \Phi, \mathrm{Tm} \rangle$ durch $\Phi(R,S) = \{ \langle t_1,..,t_n \rangle \mid TRt_1..t_n \in S \}$. Dann gilt für alle $S \in \mathcal{S}$ und alle $A \in S$: Wenn nicht alle Variablen der gegebenen Sprache frei in S vorkommen, existiert ein $S' \supseteq S$ mit $w_{id}^{S'}(A) = 1$ (wobei id wieder die identische Belegung bezeichnet).

Beweis: Für $A = TRt_1..t_n$ folgt die Behauptung sofort; für $A = FRt_1..t_n$ folgt sie aus $TRt_1..t_n \notin S$.

(α) Aus $TA_1 \wedge A_2 \in S$ folgt $S, TA_1, TA_2 \in \mathcal{S}$. Nach Ind.ann. existiert ein $S_1 \supseteq S, TA_1, TA_2$ mit $w_{id}^{S_1}(TA_1) = 1$, ebenso ein $S_2 \supseteq S_1$ mit $w_{id}^{S_2}(TA_2) = 1$; daher gilt $w_{id}^{S_2}(TA_1 \wedge A_2) = 1$.

Aus $FA_1 \vee A_2 \in S$ folgt $S, FA_1, FA_2 \in \mathcal{S}$; nach Ind.ann. existieren $S_i \supseteq S, FA_1, FA_2$ (für i=1,2) mit $w_{id}^{S_i}(FA_i) = 1$. Daraus folgt $w_{id}^{S}(FA_i) = 1$ (für i=1,2), also auch $w_{id}^{S}(FA_1 \vee A_2) = 1$.

Aus $FA_1 \rightarrow A_2$ S folgt $S, TA_1, FA_2 \in \mathcal{S}$; also existiert ein $S_1 \supseteq S, TA_1, FA_2$ mit $w_{id}^{S_1}(TA_1) = 1$. Ebenso existiert ein $S_2 \supseteq S_1$ mit $w_{id}^{S_2}(FA_2) = 1$, woraus $w_{id}^{S}(FA_1 \rightarrow A_2) = 1$ folgt.

Aus $T\neg A \in S$ folgt $S', FA \in \mathcal{S}$ für alle $S' \supseteq S$; für alle $S' \supseteq S$ existiert ein $S'' \supseteq S', FA$ mit $w_{id}^{S''}(FA) = 1$. Damit gilt $w_{id}^{S'}(FA) = 1$ für alle $S' \supseteq S$.

Aus $F\neg A \in S$ folgt $S, TA \in \mathcal{S}$; es existiert ein $S' \supseteq S, TA$ mit $w_{id}^{S'}(TA) = 1$, woraus $w_{id}^{S}(F\neg A) = 1$ folgt.

(β) Aus $TA_1 \vee A_2 \in S$ folgt $S, TA_i \in \mathcal{S}$ für ein i; es existiert ein $S' \supseteq S, TA_i$ mit $w_{id}^{S'}(TA_i) = 1$, also gilt $w_{id}^{S'}(TA_1 \vee A_2) = 1$.

Aus $FA_1 \wedge A_2 \in S$ folgt $S, FA_i \in \mathcal{S}$ für ein i; es existiert ein $S' \supseteq S, FA_i$ mit $w_{id}^{S'}(FA_i) = 1$, woraus $w_{id}^{S}(FA_i) = 1$ und damit $w_{id}^{S}(FA_1 \wedge A_2) = 1$ folgt.

Für $TA_1 \to A_2 \in S$ folgt die Behauptung sofort, falls für alle $S' \geq S$ $w_{id}^{S'}(FA_1) = 1$ gilt. Falls ein $S' \geq S$ existiert mit $w_{id}^{S'}(FA_1) = 0$, kann nicht $S', FA_1 \in \mathcal{S}$ gelten; also gilt $S', TA_2 \in \mathcal{S}$ und es existiert ein $S'' \geq S', TA_2$ mit $w_{id}^{S''}(TA_2) = 1$ woraus $w_{id}^{S''}(TA_1 \to A_2) = 1$ folgt.

(γ) Aus $F \exists x A(x) \in S$ folgt $S, FA(t) \in \mathcal{S}$ für alle $t \in Tm$; für alle $t \in Tm$ existiert also ein $S_t \geq S, FA(t)$ mit $w_{id}^{S_t}(FA(t)) = 1$. Es folgt $w_{id}^{S}(FA(t)) = 1$ für alle $t \in Tm$ und damit $w_{id}^{S}(F \exists x A(x)) = 1$.

(δ) Aus $T \exists x A(x) \in S$ folgt $S, TA(y) \in \mathcal{S}$ für irgendeine Variable y die nicht frei in S vorkommt. Es existiert also ein $S' \geq S, TA(y)$ mit $w_{id}^{S'}(TA(y)) = 1$, woraus $w_{id}^{S'}(T \exists x A(x)) = 1$ folgt.

Für den Rest dieses Kapitels seien nur solche Konsistenzeigenschaften betrachtet, die keine Elemente S haben, in denen alle Variablen der gegebenen abzählbaren Sprache frei vorkommen. Dann gilt das MET in der Form: Jedes $S_o \in \mathcal{S}$ ist erfüllbar.- Mit Hilfe des bewiesenen Satzes erhält man die Aussage des MET als Korollar des GMT in folgendem Sinne:

Sei $\mathcal{S}$ eine CP, $\langle \mathcal{S}, \subseteq, \tilde{\Phi}, Tm \rangle$ die daraus definierte FP. Zu einem beliebigen $S_o \in \mathcal{S}$ sei $\langle S_n \rangle$ eine wie im Lemma 1 für den Beweis des GMT definierte aufsteigende Folge von Elementen aus $\mathcal{S}$; es sei $v_{\mathcal{S}}$ die Bewertungsfunktion der von $\mathrm{im}(\langle S_n \rangle)$ erzeugten Struktur. Dann gilt $v_{id}(\bigcup \langle S_n \mid n \in \omega \rangle) = 1$.

Beweis: Für $TA \in S_n$ gilt $w_{id}^{S_n}(T\neg\neg A) = 1$, also $v_{id}(T\neg\neg A) = 1$.

Für $FA \in S_n$ gilt $FA \in S_m$ für alle $m \geq n$, also $w_{id}^{S_m}(FA) = 1$

für alle $m \in \omega$, woraus $v_{id}(FA) = 1$ folgt.

Jede bezüglich $\langle \mathcal{S}, \subseteq, \Phi, Tm \rangle$ generische Folge $S_0 \subseteq S_1 \subseteq \ldots$ liefert also eine Struktur, in welcher S_0 erfüllbar ist. Man kann sich fragen, ob die im Beweis des MET definierte Folge selbst generisch ist. Das ist zwar nicht der Fall; man kann aber zeigen, daß sie wenigstens die Formeln bezüglich der identischen Belegung entscheidet, welche in einem ihrer Glieder vorkommen (d.h. daß sie eine spezielle Form der Bedingung (ii) der Generizität erfüllt):

Satz: Sei $\mathcal{S}$ eine CP, zu einem beliebigen $S_0 \in \mathcal{S}$ sei $\langle S_n \rangle$ die im Beweis des MET definierte Folge. Bezüglich $\langle \mathcal{S}, \subseteq, \Phi, Tm \rangle$ gilt dann: Für alle $m \in \omega$ und alle $A \in S$ existiert ein $n \geq m$ mit $w_{id}^{S_n}(A) = 1$.

Beweis: Für Atomformeln folgt die Behauptung sofort.

(α) Aus $\alpha \in S_m$ folgt $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \in S_{m'}$ für ein $m' \geq m$, nach Ind.ann. existiert ein $n \geq m'$ mit $w_{id}^{S_n}(\alpha_i) = 1$ (für $i=1,2$). Falls α von der Form $TA_1 \wedge A_2$, $FA_1 \vee A_2$, $FA_1 \rightarrow A_2$ oder $F \neg A$ ist, folgt direkt $w_{id}^{S_n}(\alpha) = 1$. Für $\alpha = T \neg A$ gilt $FA \in S$ für alle $S \supseteq S_{m'}$, also $w_{id}^{S}(FA) = 1$ für alle $S \supseteq S_{m'}$, woraus $w_{id}^{S_{m'}}(T \neg A) = 1$ folgt.

(β) Aus $\beta \in S_m$ folgt $\beta, \beta_i \in S_{m'}$ für ein i und ein $m' \geq m$, damit $w_{id}^{S_n}(\beta_i) = 1$ für ein $n \geq m'$. Falls β von der Form $TA_1 \vee A_2$ oder $FA_1 \wedge A_2$ ist, folgt die Behauptung direkt. Falls $\beta = TA_1 \rightarrow A_2$ und $\beta_i = TA_2$ gilt, ebenso; für $\beta = TA_1 \rightarrow A_2$ und $\beta_i = FA_1$ gilt für alle $S \supseteq S_{m'}$ $w_{id}^{S_{m'}}(FA_1) = 1$, damit auch $w_{id}^{S_{m'}}(TA_1 \rightarrow A_2) = 1$.

(γ) Aus $F \exists x A(x) \in S$ folgt für alle $t \in Tm$ $FA(t) \in S_{n(t)}$ für gewisse

$n(t) \geq m$, damit $w_{id}^{S_m}(FA(t)) = 1$ für alle $t \in Tm$, also auch $w_{id}^{S_m}(F\exists xA(x)) = 1$.

(δ) Aus $T\exists xA(x) \in S$ folgt $TA(y) \in S_{m'}$ für ein $m' \geq m$ und eine Variable y, also gilt $w_{id}^{S_n}(TA(y)) = 1$ für ein $n \geq m'$ und damit $w_{id}^{S_n}(T\exists xA(x)) = 1$.

Man erhält das MET auch dann als Korollar des GMT, wenn man sich zu einem gegebenen $S_c \in \mathcal{S}$ auf die "mit S_o konsistenten Mengen" beschränkt, d.h. wenn man statt der vollen CP $\mathcal{S}$ nur $H = \{S \in \mathcal{S} \mid S_o \cup S \in \mathcal{S}\}$ als die Grundmenge der Quasiordnung wählt und Φ wie oben definiert. Es gilt wieder: Für alle $S \in H$ und alle $A \in S$ existiert ein $S' \supseteq S$ mit $w_{id}^{S'}(A) = 1$; für jede generische Folge $S_o \subseteq S_1 \subseteq \ldots$ gilt bezüglich der von $im(\langle S_n \rangle)$ erzeugten Struktur $v_{id}(\bigcup\langle S_n \mid n \in \omega \rangle) = 1$.

Bekanntlich erhält man zu jeder FS $\langle H, \leq, \Phi, U \rangle$ eine Heyting-wertige Struktur bezüglich der Algebra $E(H)$ der Enden von $\langle H, \leq \rangle$, indem man jedem n-stelligen Prädikat R die Funktion $r(u_1,..,u_n) = \{h \in H \mid \langle u_1,..,u_n \rangle \in \Phi(R,h)\}$ zuordnet. Für alle Formeln A gilt dann $v_\varphi(A) = \{h \in H \mid w_\varphi^h(A) = 1\}$.

Für die zu einer CP $\mathcal{S}$ und einem $S_c \in \mathcal{S}$ definierte FS $\langle H, \subseteq, \Phi, Tm \rangle$ (mit $H = \{S \in \mathcal{S} \mid S_o \cup S \in \mathcal{S}\}$) gilt daher speziell: Aus $A \in S_o$ folgt $w_{id}^{S_o}(\neg\neg A) = 1$ (wobei $\neg\neg TX = T\neg\neg X$ und $\neg\neg FX = F\neg\neg X$ gesetzt sei), also $S_o \in v_{id}(\neg\neg A)$ (wobei $v_\varphi(TX) = v_\varphi(X)$ und $v_\varphi(FX) = -v_\varphi(X)$ gesetzt wird), also $--[S_o, \rightarrow) \subseteq --v_{id}(A)$ (wobei $[S_o, \rightarrow)$ das durch S_o bestimmte Hauptende bezeichnet). Weiter gilt $--[S_o, \rightarrow) = H$. Es gilt nämlich $h \in --[S_o, \rightarrow)$ genau dann, wenn für alle $h' \supseteq h$ ein $h'' \supseteq h'$ existiert mit $h'' \supseteq S_o$. Zu

einem gegebenen $h \in H$ und einem beliebigen $h' \in H$ mit $h' \supseteq h$ definiere man $h'' = S_o \cup h'$.- Für alle $A \in S_o$ gilt also -- $v_{id}(A) = 1_{E(H)}$.

Es sei nun $\mathfrak{B}$ die Boolesche Algebra der regulären Elemente von E(H) und π der kanonische Ordnungshomomorphismus von E(H) nach $\mathfrak{B}$. Man definiere eine $\mathfrak{B}$-wertige Struktur durch $\bar{r}(t_1,..,t_n) = \pi(r(t_1,..,t_n))$, mit w_φ sei die zugehörige Bewertungsfunktion bezeichnet. Wegen $\pi(v_\varphi(A)) \leq w_\varphi(A)$ für alle Formeln A folgt aus dem oben Ausgeführten $w_{id}(S_o) = 1_{\mathfrak{B}}$; S_o ist in einer Booleschwertigen Struktur erfüllbar.

Bemerkung: Zu einer CP $\mathcal{S}$ und einem $S_o \in \mathcal{S}$ kann man für $H = \{S \in \mathcal{S} \mid S_o \cup S \in \mathcal{S}\}$ direkt die E(H)-wertige Struktur definieren, die oben durch eine FP eingeführt wurde (indem man $r(t_1,..,t_n) = \{h \in H \mid TRt_1..t_n \in h\}$ setzt), und dann direkt (unter Ausnützung der CP - Regeln) beweisen, daß für alle $h \in H$ und alle $A \in h$ $h \in v_{id}(\neg\neg A)$ gilt, woraus wieder -- $v_{id}(A) = 1$ für alle $A \in S$ folgt.

IV. EIN VOLLSTÄNDIGKEITSBEWEIS FÜR KTE OHNE SCHNITT MIT HILFE DER TABLEAUMETHODE

§1. Für signierte Formeln der Sprache der einfachen Typenlogik werden Komponenten wie im Fall der Prädikatenlogik definiert, freilich unter Relativierung auf Typen im Fall der γ - und δ - Formeln; Formeln $Tt_1,..,t_n \varepsilon \lambda x_1..x_n A(x_1,..,x_n)$ (bzw. $Ft_1,..,t_n \varepsilon \lambda x_1..x_n A(x_1,..,x_n)$) sollen zum α - Typ gehören, und es soll $\alpha_1 = \alpha_2 = TA(t_1,..,t_n)$ (bzw. $FA(t_1,..,t_n)$) definiert sein. Die Tableauregeln werden auch übernommen, wobei jetzt die Regel (E) in folgender Form hinzukommt:

$$\frac{S, Ts'_1,..,s'_{n'} \varepsilon u, Ft'_1,..,t'_{n'} \varepsilon u}{... \mid Ta_{i_1},..,a_{ir_i} \varepsilon s_i, Fa_{i_1},..,a_{ir_i} \varepsilon t_i \mid ... \mid Ta_{i_1},..,a_{ir_i} \varepsilon t_i, Fa_{i_1},..,a_{ir_i} \varepsilon s_i \mid ...}$$

wobei die in I.§1. formulierten Bedingungen für die (E)-Regel erfüllt sein sollen.

Den Begriff der Konsistenzeigenschaft (für den wieder die Abkürzung CP verwandt wird) kann man auf KTE verallgemeinern, indem man für (E) die folgende Bedingung hinzunimmt:

(CP5) Wenn $S, Ts'_1,..,s'_{n'} \varepsilon u, Ft'_1,..,t'_{n'} \varepsilon u \in \mathcal{S}$ gilt, dann gilt für ein $i \leq n$ $\{Ta_{i_1},..,a_{ir_i} \varepsilon s_i, Fa_{i_1},..,a_{ir_i} \varepsilon t_i\} \in \mathcal{S}$ oder $\{Ta_{i_1},..,a_{ir_i} \varepsilon t_i, Fa_{i_1},..,a_{ir_i} \varepsilon s_i\} \in \mathcal{S}$ (wobei die Bedingungen der (E)-Regel erfüllt sein sollen).

Ist es nun möglich, die im letzten Kapitel beschriebene Methode auf die klassische Typenlogik zu verallgemeinern, d.h. zu einer CP $\mathcal{S}$ für KTE und einem gegebenen $S_o \in \mathcal{S}$ eine Forcing-Struktur zu finden, welche eine Booleschwertige Struktur definiert, in der S_o erfüllbar ist?

Zunächst ist nicht klar, wie der Begriff der Forcing-Struktur von der Prädikatenlogik direkt auf die Typenlogik zu verallgemeinern wäre:

Vom Gesichtspunkt der Typenlogik sind die Prädikate der Logik erster Stufe Konstanten vom Typ $(0,..,0)$; diesen wurden zu jedem $h \in H$ vermittels Φ Relationen über einer Menge U zugeordnet. Wenn man zuläßt, daß in der vorgegebenen Sprache zu gewissen Typen τ keine Konstanten k^τ vorhanden sind, wenn man insbesondere die "reine" Typenlogik (ohne irgendwelche Konstanten) mit erfassen will, ergibt sich von daher keine Möglichkeit einer allgemeinen Definition. Auch der Gesichtspunkt, daß Forcing-Strukturen Familien von Strukturen mit "wachsender Information" sind (es gilt $\Phi(R,h) \subseteq \Phi(R,h')$ für $h \leq h'$), führt zu keinem befriedigenden Ansatz. Es ist nicht klar, wie in bezug auf eine Familie $\langle\langle A_h^\tau\rangle_\tau\rangle_{h\in H}$ von (2-wertigen) Strukturen der Typenlogik so etwas wie "wachsende Information" zu definieren wäre. (Die Forderung "$A_h^\tau \subseteq A_{h'}^\tau$ für $h \leq h'$" drückt nicht das aus, was man gerne hätte.)

Nun kann man aufgrund der am Schluß des vorhergehenden Kapitels gemachten Bemerkung versuchen, direkt zu $S_0 \in \mathcal{S}$ eine Boolesch-wertige Struktur zu definieren, indem man von der Menge der Enden von $H = \{S \in \mathcal{S} \mid S_0 \cup S \in \mathcal{S}\}$ ausgeht. Es gilt jetzt aber nicht mehr - was früher reichlich ausgenutzt wurde -, daß S eine Teilmenge von S' ist, sofern S' aus S durch Anwendung einer CP-Regel ensteht; denn die Regel (E) "läßt Formeln verschwinden". Es sei "$S \lhd S'$" durch "S' entsteht aus S durch endlich viele Anwendungen von CP-Regeln (für KTE)" definiert. Kann man die ein-

fache Inklusion durch $\lhd$ ersetzen, d.h. leistet $\langle H, \lhd \rangle$, was man möchte? Die Mengen $\{h \in H \mid TA \in h\}$, die für die Prädikatenlogik zur Definition der Booleschwertigen Struktur verwendet wurden, sind bezüglich $\lhd$ keine Enden mehr; und es ist auch nicht klar, wie Enden E z.B. mittels Teilmengen von $\{h \in H \mid TA \in h\}$ als Werte für A zu finden wären, da es nicht ausgeschlossen ist, daß für gewisse $h \in H$ und $h' \in H$ mit $h \lhd h'$ sowohl $TA \in h$ als auch $FA \in h'$ gilt (nämlich aufgrund der Regel (E)); dies muß eine konsistente Definition jedoch ausschließen. Eine Lösung der Probleme ergibt sich aus der Trennung der Behandlung der (E)-Regel von allen anderen Regeln, wobei die angedeutete Möglichkeit der Inkonsistenz dadurch vermieden wird, daß man statt Enden nur linear geordnete Teilmengen von H betrachtet, die gegen Formelauflösung bezüglich Regeln von KT abgeschlossen sind. Der folgende Paragraph wird dies präzisieren; allerdings scheint die Methode nur zum Beweis der schwachen Vollständigkeit auszureichen.

§2. Sei $\mathcal{C}$ die Menge aller endlichen, bezüglich KTE konsistenten Mengen signierter Formeln; gegeben sei eine feste Formel X mit $\{FX\} \in \mathcal{C}$ (d.h. X ist nicht in KTE beweisbar).
Auf $\mathcal{C}$ definiere man eine Relation R durch: SRS' gilt genau dann, wenn S' aus S durch Anwendung einer KTE-Regel entsteht; dabei sollen die KT-Regeln nur so angewendet werden, daß $S \subseteq S'$ gilt, und es soll die (α)-Regel auch in der Form $\dfrac{S, \alpha}{S, \alpha, \alpha_1, \alpha_2}$ als Grundregel betrachtet werden. Mit $\lhd$ sei die transitive Hülle von R, mit $\trianglelefteq$ die zugehörige Quasiordnung bezeichnet. Weiter definiere man $H = \{S \in \mathcal{C} \mid \{FX\} \trianglelefteq S\}$

$\mathcal{T}_n = \{f \in H^{n+1} \mid f(0) = \{FX\}$ und $f(k)Rf(k+1)$ für alle $k \in n\}$ und $\mathcal{T} = \bigcup \langle \mathcal{T}_n \mid n \in \omega \rangle$. Auf $\mathcal{T}$ definiere man eine Relation $\bar{R}$ durch: $f\bar{R}f'$ gilt genau dann, wenn $f \in \mathcal{T}_n$ und $f' \in \mathcal{T}_{n+1}$ gilt mit $f' \restriction n+1 = f$. Die von $\bar{R}$ erzeugte Halbordnung $\trianglelefteq$ ist die Fortsetzungsrelation zwischen Funktionen aus $\mathcal{T}$.- Wenn man mit φ die Funktion bezeichnet, welche jeder Folge f aus $\mathcal{T}_n$ ihr letztes Glied f(n) zuordnet, dann bildet $\langle \mathcal{T}, R, \varphi \rangle$ einen Baum mit kleinstem Element $\langle \{FX\} \rangle$; dieser werde der Auflösungsbaum von $\{FX\}$ genannt.

Der Begriff "Hintikka-Menge für KT" ist wie der einer Hintikka-Menge für die Prädikatenlogik definiert (siehe den Beweis des MET, III.§1.), wobei die γ - und δ -Fälle auf Typen zu relativieren sind. Ein Knoten f aus $\mathcal{T}_n$ heiße "kritisch", wenn f(n) aus f(n-1) durch Anwendung der (E)-Regel entsteht. Eine bezüglich $\trianglelefteq$ lineare, dichte Teilmenge p von $\mathcal{T}$ heiße Hintikka-Pfad, wenn 1. das kleinste Element f von p entweder $\langle \{FX\} \rangle$ oder ein kritischer Knoten ist und kein kritischer Knoten $g \in p$ existiert mit $f \trianglelefteq g$;

2. $\bigcup \varphi(p)$ Hintikka-Menge für KT ist.

Lemma: Zu jedem $f \in \mathcal{T}$ existiert ein Hintikka-Pfad p durch f (d.h.mit $f \in p$).

Der Beweis kann z.B. wie bei Smullyan (vgl. [9], p.68) folgendermaßen geführt werden:

Es sei F_1 eine (endliche) Folge aller Elemente von $\varphi(f)$; F_1 hat mindestens die Länge 1. Für $n > 1$ sei F_n eine Folge signierter Formeln der Länge mindestens n mit $\mathrm{im}(F_n) \in \mathcal{C}$; A_n sei die n-te Formel in F_n. Dann definiere man

$$F_{n+1} = \begin{cases} F_n \frown \langle A_n \rangle & \text{falls } A_n \text{ eine Primformel (d.h.von der Form } t_1,\ldots,t_n \in u, \text{ u eine freie Variable oder Konstante) ist} \\ F_n \frown \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle & \text{falls } A_n \text{ eine } \alpha\text{-Formel ist} \\ F_n \frown \langle \beta_i \rangle & \text{falls } A_n \text{ eine } \beta\text{-Formel ist (wobei i minimal für } \mathrm{im}(F_n), \beta_i \in \mathcal{C} \text{ ist)} \\ F_n \frown \langle \delta(a^\tau) \rangle & \text{falls } A_n \text{ eine } \delta\text{-Formel ist (wobei } a^\tau \text{ die erste freie Variable vom Typ } \tau \text{ ist, die nicht in } \mathrm{im}(F_n) \text{ vorkommt)} \\ F_n \frown \langle \gamma(t^\tau), \gamma \rangle & \text{falls } A_n \text{ eine } \gamma\text{-Formel ist (wobei } t^\tau \text{ de erste Term vom Typ } \tau \text{ ist mit } \gamma(t^\tau) \notin \mathrm{im}(F_n)) \end{cases}$$

F_{n+1} hat mindestens die Länge n+1, es gilt $\mathrm{im}(F_{n+1}) \in \mathcal{C}$ und entweder $\mathrm{im}(F_n) = \mathrm{im}(F_{n+1})$ oder $\mathrm{im}(F_n) R\, \mathrm{im}(F_{n+1})$. Da $\bigcup \langle \mathrm{im}(F_n) \mid n \in \omega \rangle$ eine Hintikka-Menge für KT ist, definiert $\langle \mathrm{im}(F_n) \mid n \in \omega \rangle$ einen Hintikka-Pfad durch f.

Bemerkung: Die im Beweis des MET konstruierte Folge $\langle S_n \rangle$ ist hier nicht zu gebrauchen, da i.a. nicht $S_n R S_{n+1}$ gilt.–

Es sei nun P die Menge aller Hintikka-Pfade. Zu jedem $f \in \mathcal{T}$ definiere man $B_f = \{p \in P \mid f \in p\}$, die Menge aller Hintikka Pfade durch f. Nach obigem Lemma ist B_f niemals leer.
Seien f und g zwei beliebige Knoten aus $\mathcal{T}$. Falls f und g unvergleichbar sind oder ein kritischer Knoten zwischen f und g existiert, gilt $B_f \cap B_g = \emptyset$; sonst gilt entweder $B_f \subseteq B_g$ (falls $g \leq f$ oder $B_g \subseteq B_f$ (falls $f \leq g$). Daraus folgt: $\{B_f \mid f \in \mathcal{T}\} \cup \{\emptyset\}$ ist ein Basis für eine Topologie auf P. Mit $\mathcal{O}$ sei die Heytingalgebra der offenen Mengen, mit $\mathcal{B}$ die Boolesche Algebra der regulären Elemente von $\mathcal{O}$ bezeichnet.

Für jede Formel A werden kanonische T- und F-Werte in $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$ folgendermaßen definiert:

$w_T(A) = \{p \in P \mid TA \in \bigcup \varphi(p)\}$, $\quad v_T(A) = -w_T(A)$;

$w_F(A) = \{p \in P \mid FA \in \bigcup \varphi(p)\}$, $\quad v_F(A) = -w_F(A)$.

Es gilt 1) $w_T(A) \in \mathfrak{A}$, $w_F(A) \in \mathfrak{A}$, da man z.B. im ersten Fall die Darstellung $w_T(A) = \bigcup \langle B_f \mid TA \in \varphi(f) \rangle$ hat.

2) Für alle $p \in P$ und alle $f,g \in p$: $\varphi(f) \subseteq \varphi(g)$ oder $\varphi(g) \subseteq \varphi(f)$.

3) $w_T(A) \subseteq -w_F(A)$ wegen $w_T(A) \subseteq P \setminus \{p \in P \mid FA \notin \bigcup \varphi(p)\}$.

In den beiden folgenden Lemmata werden die wesentlichen Eigenschaften der kanonischen Werte zusammengestellt.

Lemma 1: a) $w_T(A_1 \wedge A_2) \subseteq w_T(A_1) \cap w_T(A_2)$

$w_T(A_1 \vee A_2) \subseteq w_T(A_1) \cup w_T(A_2)$

$w_T(\exists x^\tau A(x^\tau)) \subseteq \bigcup \langle w_T(A(a^\tau)) \mid a^\tau \in Fr^\tau \rangle$

$w_T(\forall x^\tau A(x^\tau)) \subseteq \bigcap \langle v_T(A(t^\tau)) \mid t^\tau \in Tm^\tau \rangle$

$w_T(t_1,..,t_n \varepsilon \lambda x_1..x_n A(x_1,..,x_n)) \subseteq w_T(A(t_1,..,t_n))$

b) $w_F(A_1 \wedge A_2) \subseteq w_F(A_1) \cup w_F(A_2)$

$w_F(A_1 \vee A_2) \subseteq w_F(A_1) \cap w_F(A_2)$

$w_F(\exists x^\tau A(x^\tau)) \subseteq \bigcap \langle w_F(A(t^\tau)) \mid t^\tau \in Tm^\tau \rangle$

$w_F(\forall x^\tau A(x^\tau)) \subseteq \bigcup \langle w_F(A(a^\tau)) \mid a^\tau \in Fr^\tau \rangle$

$w_F(t_1,..,t_n \varepsilon \lambda x_1..x_n A(x_1,..,x_n)) \subseteq w_F(A(t_1,..,t_n))$

c) $w_T(\neg A) \subseteq w_F(A)$

$w_F(\neg A) \subseteq w_T(A)$

d) Aus $w_T(s_1',..,s_{n'}' \varepsilon u) \cap w_F(t_1',..,t_{n'}' \varepsilon u) \neq \emptyset$ folgt $(w_T(a_{i1},..,a_{ir_i} \varepsilon s_i) \cap w_F(a_{i1},..,a_{ir_i} \varepsilon t_i)) \cup \cup (w_T(a_{i1},..,a_{ir_i} \varepsilon t_i) \cap w_F(a_{i1},..,a_{ir_i} \varepsilon s_i)) \neq \emptyset$ für ein $i \leq n$, sofern die Bedingungen der (E)-Regel er-

füllt sind.

Beweis: Die in a), b) und c) formulierten Behauptungen folgen direkt aus den Eigenschaften von Hintikka-Mengen; z.B.

Aus $p \in w_T(\exists x^\tau A(x^\tau))$ folgt $T\exists x^\tau A(x^\tau) \in \bigcup \varphi(p)$, also gibt es ein a^τ mit $TA(a^\tau) \in \bigcup \varphi(p)$, d.h. es gibt ein a^τ mit $p \in w_T(A(a^\tau))$.

Aus $p \in w_T(\forall x^\tau A(x^\tau))$ folgt $T\forall x^\tau A(x^\tau) \in \bigcup \varphi(p)$, also gilt für alle t^τ $TA(t^\tau) \in \bigcup \varphi(p)$; damit hat man für all t^τ $w_T(\forall x^\tau A(x^\tau)) \subseteq w_T(A(t^\tau))$, woraus die Behauptung folgt.

d) Sei $p \in w_T(s_1', .., s_{n'}', \varepsilon u) \cap w_F(t_1', .., t_{n'}', \varepsilon u)$. Es existie ein $f_1 \in p$ mit $(Ts_1', .., s_{n'}', \varepsilon u) \in \varphi(f_1)$ und ein $f_2 \in p$ mit $(Ft_1', .., t_{n'}', \varepsilon u) \in \varphi(f_2)$, woraus $Ts_1', .., s_{n'}', \varepsilon u, Ft_1', .., t_{n'}', \varepsilon u \in \varphi(f)$ für $f = \max(f_1, f_2)$ folgt. Dann existiert ein $f' \in \mathcal{T}$ und ein $i \leq n$ mit $f \bar{R} f'$ und:

$\varphi(f') = \{Ta_{i_1}, .., a_{i r_i} \varepsilon s_i, Fa_{i_1}, .., a_{i r_i} \varepsilon t_i\}$ oder

$\varphi(f') = \{Ta_{i_1}, .., a_{i r_i} \varepsilon t_i, Fa_{i_1}, .., a_{i r_i} \varepsilon s_i\}$. Durch f' geht ein Hintikka-Pfad p', woraus die Behauptung folgt.

Lemma 2: Wenn man in den Behauptungen a), b) und c) von Lemma "w_T" bzw. "w_F" durch "v_T" bzw. "v_F" und die Operationen $\cap, \cup, \bigcap, \bigcup$ der Heytingalgebra $\mathcal{O}$ durch die Operation $\wedge, \vee, \bigwedge, \bigvee$ der Booleschen Algebra $\mathcal{B}$ ersetzt, dann gelten die daraus resultierenden Inklusionen.

d) Aus $v_T(A_1) \cap v_F(A_2) \neq \emptyset$ folgt $w_T(A_1) \cap w_F(A_2) \neq \emptyset$.

Beweis: Im Fall a) gilt z.B.:

$$--w_T(\exists x^\tau A(x^\tau)) \subseteq -- \bigcup \langle w_T(A(a^\tau)) \mid a^\tau \in Fr^\tau \rangle$$
$$-- \bigcup \langle -- w_T(A(a^\tau)) \mid a^\tau \in Fr^\tau \rangle ;$$

aus $w_T(\forall x^\tau A(x^\tau)) \subseteq w_T(A(t^\tau))$ für alle t^τ folgt

$--w_T(\forall x^\tau A(x^\tau)) \subseteq --w_T(A(t^\tau))$ für alle t .

d) $p \in v_F(A_2)$ gilt genau dann, wenn ein $f_2 \in p$ existiert so, daß für alle $q \in P$ mit $f_2 \in q$ und alle $g \in q$ ein $r \in P$ existiert mit $g \in r$ und $FA_2 \in \bigcup\varphi(r)$. Aus $p \in v_T(A_1)$ folgt, daß ein $q_1 \in P$ existiert mit $f_2 \in q_1$ und $TA_1 \in \bigcup\varphi(q_1)$; es gibt also ein $f_1 \in q_1$ mit $TA_1 \in \varphi(f_1)$. Zu q_1 und f_1 existiert ein $q_2 \in P$ mit $f_1 \in q_2$ und $FA_2 \in \bigcup\varphi(q_2)$. Es gilt also $q_2 \in w_T(A_1) \cap w_F(A_2)$.

Man definiere nun eine $\mathcal{B}$-wertige Prästruktur $\langle A^\tau \rangle$, zusammen mit einer Relation $<$, wie folgt:

1. $A^\circ = Tm^\circ$; es gilt $t^\circ < a$ genau dann, wenn $t^\circ = a$ gilt.
2. Für $\tau = (\tau_1,..,\tau_n)$, $t \in Tm^\tau$ und $a \in \mathcal{B}^{A^{\tau_1} \times ... \times A^{\tau_n}}$ gilt $t < a$ genau dann, wenn für alle $t_1^{\tau_1},..,t_n^{\tau_n}$ und alle $\langle a_1,..,a_n\rangle$ aus $A^{\tau_1} \times ... \times A^{\tau_n}$ gilt: Aus $t_i < a_i$ für $1 \leq i \leq n$ folgt $v_T(t_1,..,t_n \in t) \subseteq a(a_1,..,a_n) \subseteq -v_F(t_1,..,t_n \in t)$.

$A^\tau = \{a \in \mathcal{B}^{A^{\tau_1} \times ... \times A^{\tau_n}} \mid$ es existiert ein $t \in Tm^\tau$ mit $t < a\}$.

Aus dem folgenden Lemma sieht man, wie man jeder Konstanten (oder freien Variablen) u einen kanonischen Repräsentanten a_u zuordnen kann:

Für alle freien Variablen und Konstanten u^τ existiert ein $a \in A^\tau$ mit $u < a$.

Beweis: Für $\tau = 0$ wähle $a = u$.

Für $\tau = (\tau_1,..,\tau_n)$ definiere

$a(a_1,..,a_n) = -- \bigcup\langle v_T(t_1,..,t_n \in u) \mid t_i < a_i \ (1 \leq i \leq n)\rangle$.

Zu zeigen ist: Für alle $s_i < a_i$ und alle $t_i < a_i$ gilt

$v_T(s_1,..,s_n \varepsilon u) \subseteq -v_F(t_1,..,t_n \varepsilon u)$.

Bemerkung: Diese Aussage entspricht der Behauptung im zweiten Teil des in II.§3. bewiesenen Lemmas über die Existenz kanonischer Repräsentanten und gründet ebenso wie jene direkt auf der (E)-Regel.

Für alle $\tau_i = (\tau_{i_1},..,\tau_{i_{r_i}})$ und alle freien Variablen $u_{ij}^{\tau_{ij}}$ welche nicht in s_i oder t_i vorkommen, existieren nach Ind.ann. $a_{ij} \in A^{\tau_{ij}}$ mit $u_{ij} < a_{ij}$, d.h. mit $v_T(u_{i_1},..,u_{i_{r_i}} \varepsilon s_i) \subseteq a_i(a_{i_1},..,a_{i_{r_i}}) \subseteq -v_F(u_{i_1},..,u_{i_{r_i}} \varepsilon s_i)$ und $v(u_{i_1},..,u_{i_{r_i}} \varepsilon t_i) \subseteq a_i(a_{i_1},..,a_{i_{r_i}}) \subseteq -v_F(u_{i_1},..,u_{i_{r_i}} \varepsilon t_i)$.

Für alle $i \leq n$ mit $\tau_i = (\tau_{i_1},..,\tau_{i_{r_i}})$ gilt also $v_T(u_{i_1},..,u_{i_{r_i}} \varepsilon s_i) \cap v_F(u_{i_1},..,u_{i_{r_i}} \varepsilon t_i) = \emptyset$ und $v_T(u_{i_1},..,u_{i_{r_i}} \varepsilon t_i) \cap v_F(u_{i_1},..,u_{i_{r_i}} \varepsilon s_i) = \emptyset$, so daß man erst recht $w_T(u_{i_1},..,u_{i_{r_i}} \varepsilon s_i) \cap w_F(u_{i_1},..,u_{i_{r_i}} \varepsilon t_i) = \emptyset$ und $w_T(u_{i_1},..,u_{i_{r_i}} \varepsilon t_i) \cap w_F(u_{i_1},..,u_{i_{r_i}} \varepsilon s_i) = \emptyset$ hat.

Nach Lemma 1d) gilt dann

$w_T(s_1,..,s_n \varepsilon u) \cap w_F(t_1,..,t_n \varepsilon u) = \emptyset$, woraus mit Lemma 2d) $v_T(s_1,..,s_n \varepsilon u) \cap v_F(t_1,..,t_n \varepsilon u) = \emptyset$ folgt.

Aus dem folgenden Hauptsatz erhält man wie früher, daß $\langle A^\tau \rangle_\tau$ ein Struktur ist.

Theorem: Für alle Semi-Formeln A, Semi-Terme t, Terme $t_1,..,t_n$ und alle Belegungen φ in $\langle A^\tau \rangle_\tau$ gilt: Wenn die Menge der in A bzw. t frei vorkommenden Variablen in $\{v_1,..,v_n\}$ enthalten ist und $t_i < \varphi(v_i)$ für $1 \leq i \leq n$ gilt, dann gilt $v_T(A(t_1,..,t_n)) \subseteq v_\varphi(A(v_1,..,v_n)) \subseteq -v_F(A(t_1,..,t_n))$ und $t(t_1,..,t_n) < v_\varphi(t(v_1,..,v_n))$.

Beweis: Für Variablen, Konstanten und Semi-Terme vom Typ C ist

die Behauptung klar.

$A = s_1,..,s_m \varepsilon s_o$:

Nach Ind.ann. gilt $s_j(t_1,..,t_n) < v_\varphi(s_j(v_1,..,v_n))$ für $0 \leq i \leq m$, woraus nach Definition von $<$

$v_T(s_1(t_1,..,t_n),..,s_m(t_1,..,t_n) \varepsilon s_o(t_1,..,t_n)) \leq$

$v_\varphi(s_o(v_1,..,v_n))(v_\varphi(s_1(v_1,..,v_n)),..,v_\varphi(s_m(v_1,..,v_n))) \leq$

$\leq -v_F(s_1(t_1,..,t_n),..,s_m(t_1,..,t_n) \varepsilon s_o(t_1,..,t_n))$ folgt.

$A = \neg A_1$:

Aus $v_T(A_1(t_1,..,t_n)) \leq v_\varphi(A_1(v_1,..,v_n)) \leq -v_F(A_1(t_1,..,t_n))$ folgt nach Lemma 2c) $v_T(\neg A_1(t_1,..,t_n)) \leq$

$v_F(A_1(t_1,..,t_n)) \leq -v_\varphi(A_1(v_1,..,v_n)) \leq -v_T(A_1(t_1,..,t_n)) \leq$

$\leq -v_F(\neg A_1(t_1,..,t_n))$.

$A = A_1 \vee A_2$:

$v_T(A_1(t_1,..,t_n)) \vee v_T(A_1(t_1,..,t_n))$

$\leq v_\varphi(A_1(v_1,..,v_n)) \vee v_\varphi(A_1(v_1,..,v_n))$

$\leq -v_F(A_1(t_1,..,t_n)) \vee -v_F(A_1(t_1,..,t_n))$

$= -(v_F(A_1(t_1,..,t_n)) \wedge v_F(A_1(t_1,..,t_n)))$

$\leq -v_F(A_1(t_1,..,t_n) \vee A_1(t_1,..,t_n))$

Für $A = A_1 \wedge A_2$ argumentiert man entsprechend.

$A = \exists x^\tau A_1$ $(A = A_1(x^\tau, v_1,..,v_n))$:

$v_\varphi(A) = -- \bigcup \langle v_{\varphi'}(A_1) \mid \varphi' \underset{x^\tau}{=} \varphi \rangle$.

a) Nach Ind.ann. gilt

$v_T(A_1(u^\tau, t_1,..,t_n)) \leq v_{\varphi'}(A_1(x^\tau, v_1,..,v_n))$ für

$$\varphi'(v) = \begin{cases} a_u & \text{für } v = x^\tau \\ \varphi(v) & \text{sonst} \end{cases}$$

Daher gilt für alle freien Variablen u^τ

$v_T(A_1(u^\tau, t_1,..,t_n)) \leq \bigcup \langle v_{\varphi'}(A_1) \mid \varphi' \underset{x^\tau}{=} \varphi \rangle$, also auch

$\bigcup\langle v_T(A_1(u^\tau,t_1,..,t_n)) \mid u^\tau \in Fr^\tau\rangle \subseteq \bigcup\langle v_{\varphi'}(A_1) \mid \varphi' \underset{x^\tau}{=} \varphi\rangle$,

woraus mit Lemma 2a) $v_T(\exists x^\tau A_1(x^\tau,t_1,..,t_n)) \subseteq$

$\subseteq -\bigcup\langle v_T(A_1(u^\tau,t_1,..,t_n)) \mid u^\tau \in Fr^\tau\rangle \subseteq v_\varphi(A)$ folgt.

b) Für alle $\varphi' \underset{x^\tau}{=} \varphi$ existiert ein $t \in Tm^\tau$ mit $t < \varphi'(x^\tau)$,

und nach Ind.ann. gilt $v_{\varphi'}(A_1) \subseteq -v_F(A_1(t,t_1,..,t_n))$.

Also gilt für alle $\varphi' \underset{x^\tau}{=} \varphi$:

$v_{\varphi'}(A_1) \subseteq \bigcup\langle -v_F(A_1(t,t_1,..,t_n)) \mid t \in Tm^\tau\rangle \subseteq$

$\subseteq -\bigcap\langle v_F(A_1(t,t_1,..,t_n)) \mid t \in Tm^\tau\rangle \subseteq$

$\subseteq -v_F(\exists x^\tau A_1(x^\tau,t_1,..,t_n))$.-

$A = \forall x^\tau A_1(x^\tau,v_1,..,v_n))$ geht entsprechend.

$t = \lambda y_1..y_m A$ $(A = A(y_1,..,y_m,v_1,..,v_n))$:

Es soll $v_\varphi(t)(a_1,..,a_n) = v_{\varphi'}(A)$ gelten für

$$\varphi'(v) = \begin{cases} a_j & \text{für } v = y_j \quad (1 \leq j \leq m) \\ \varphi(v) & \text{sonst} \end{cases}$$

Für beliebige $s_j < a_j$ $(1 \leq j \leq m)$ gilt:

$v_T(s_1,..,s_m \in \lambda y_1..y_m A(y_1,...,y_m,t_1,...,t_n)) \subseteq$

$\subseteq v_T(A(s_1,..,s_m,t_1,..,t_n)) \subseteq v_{\varphi'}(A(y_1,...,y_m,v_1,..,v_n)) \subseteq$

$\subseteq -v_F(A(s_1,..,s_m,t_1,..,t_n)) \subseteq$

$\subseteq -v_F(s_1,..,s_m \in \lambda y_1..y_m A(y_1,...,y_m,t_1,..,t_n))$.

Es sei nun ι eine Belegung mit $\iota(v) = a_v$ für alle freien Variablen v. Für alle Formeln A gilt dann $v_T(A) \subseteq v_\iota(A) \subseteq -v_F(A)$, speziell $v_\iota(X) \subseteq -v_F(X)$. Da es einen Hintikka-Pfad mit Anfang $\langle\{FX\}\rangle$ gibt, gilt $0 \neq w_F(X)$; wegen $w_F(X) \subseteq v_F(X)$ folgt $v_\iota(X) \neq$

Bemerkungen:

1. Zum Beweis der starken Vollständigkeit brauchte man, daß zu einer beliebigen konsistenten Menge signierter Formeln S_0 eine Struktur und eine Belegung κ in die Struktur existierte mit $v_\kappa(S_0) = 1$. Man kann die obige Konstruktion zwar mit S_0 anstelle von $\{FX\}$ durchführen, hat dann aber nur, daß e i n Hintikka-Pfad mit Anfang S_0 existiert; in Hintikka-Pfaden, die an "oberhalb" von $\langle S_0 \rangle$ gelegenen Knoten beginnen, können wegen der (E)-Regel Formeln aus S_0 verlorengegangen sein.
2. Die Idee für den obigen Beweis findet sich im wesentlichen schon bei Takahashi ([13]). Seinem Begriff des "refutation tree", durch den e i n e kanonische Weise des "Rückwärtslesens" einer nicht beweisbaren Sequenz geliefert wird, entspricht der Begriff des Auflösungsbaums von $\{FX\}$, in dem a l l e möglichen Anwendungen von Tableauregeln zugelassen sind. Eine Erschwerung bringt die (E)-Regel mit sich: Während bei allen intuitionistischen Regeln (die volle Extensionalitätsregel eingeschlossen) höchstens F-Formeln verlorengehen können, läßt die (E)-Regel auch T-Formeln veschwinden. Dem wurde durch die Isolierung der (E)-Regel-Anwendungen in der Definition von P Rechnung getragen. Vielleicht könnte die beschriebene Methode für andere Regeln ähnlichen Typs verwendbar werden.

Wie mir nach Fertigstellung des Manuskriptes bekannt wurde, hat V. Harnik in "Approximation Theorems and Model Theoretic Forcing",, §1. (J.S.L.41,1 (1976), pp.59-72) für $L_{\omega_1\omega}$ den gleichen Zusammenhang zwischen Konsistenzeigenschaften und Forcing hergestellt, wie er im ersten Satz von Kapitel III.§3. formuliert wird.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Buchholz,W.: "Ein ausgezeichnetes Modell für die intuitionistische Typentheorie", Archiv für Math. Logik und Grundlagenforschung 17 (1975), pp.55-60.

[2] Felscher,W.: "Equational Maps", Contr. to Math. Logic, Hannover 1966 (Herausg. H.A.Schmidt,K.Schütte, H.-J.Thiele), pp.123-161.

[3] Fitting,M.C.: Intuitionistic Logic, Model Theory and Forcing, 1969.

[4] Keisler,H.J.: Model Theory for Infinitary Logic, 1971.

[5] Keisler,H.J.: "Forcing and the Omitting Types Theorem", Studies in Model Theory, Herausg. M.D.Morley (MAA Studies in Math. 8), pp.96-133.

[6] Prawitz,D.: "Hauptsatz for Higher Order Logic", J.S.L.33,3 (1968), pp.452-457.

[7] Rasiowa,H.,Sikorski,R.: The Mathematics of Metamathematics, Warschau 1970 (3.ed.).

[8] Smullyan,R.M.: "A Unifying Principle in Quantification Theory", Proc.N.A.S. 49 (1963), pp.828-832.

[9] Smullyan,R.M.: First Order Logic, 1968.

[10] Smullyan,R.M.: "A Generalization of Intuitionistic and Modal Logics", Truth, Syntax and Modality, 1970 (Herausg. H.Leblanc), 274-293.

[11] Takahashi,M.: "A Proof of Cut-Elimination-Theorem in Simple Type Theory", J.Math.Soc.Japan 19 (1967), pp.393-410.

[12] Takahashi,M.: "A system of simple type theory of Gentzen style with inference on extensionality, and the cut-elimination in it", Comm.Math.Univ. St.Pauli 18 (1969), pp.129-147.

[13] Takahashi,M.: "Cut-elimination theorem and Brouwerian-valued models for intuitionistic type theor Comm.Math.Univ.St.Pauli 19 (1971), pp.55-72

[14] Titani,S.: "An algebraic formulation of cut-elimination theorem", J.Math.Soc.Japan 17 (1965),pp.72-83.

Lebenslauf

Am 18.1.195o wurde ich als Sohn des Kaufmanns Siegfried Pfitzenmaier und seiner Ehefrau Maria. geb. Angele, in Leonberg bei Stuttgart geboren. Nach dem Besuch der Grundschule in Leonberg Eltingen von 1956 bis 196o ging ich auf das Albert-Schweitzer-Gymnasium in Leonberg, wo ich 1968 das Abitur ablegte.
Im Wintersemester 1968/69 begann ich mit dem Studium der Philosophie und Mathematik an der Universität Tübingen. Nachdem ich unter Anleitung von Herrn Prof. Dr. Felscher meine Wissenschaftliche Arbeit für das Staatsexamen mit dem Titel ''Normalformen in der Arithmetik erster Stufe'' fertiggestellt hatte, legte ich im Sommer 1973 die Prüfung für das Staatsexamen in Mathematik ab. Die Staatsexamensprüfung in Philosophie folgte im Januar 1974.

Anschließend begann ich mit meiner Dissertation über ''Kanonische Modelle für schnittfreie Kalküle, mit besonderer Anwendung auf die Typenlogik'', die ich wiederum unter Anleitung von Herrn Felscher im Sommer 1976 fertigstellte. Meine Arbeit wurde von der Graduiertenförderung von Juli 1974 bis Juni 1976 unterstützt.

Seit Oktober 1972 bin ich mit Jutta Pfitzenmaier, geb. Knoblauch, verheiratet.
Meine mathematische Ausbildung verdanke ich den Professoren und Dozenten Aigner, Betsch, Felscher, Plaumann, Radbruch, Richter, Ringel, Salzmann, Strambach, Wielandt.

Druck: Polyfoto - Dr. Vogt KG
Forststrasse 58, 7 Stuttgart 1
Telefon (0711) 61 06 41

Druck: Polyfoto - Dr. Vogt KG
Forststrasse 58, 7 Stuttgart 1
Telefon (0711) 61 06 41